EGRESADOS 2018

Matemática Ciclo Superior

6°Año

Instituto Fray Mamerto Esquiú

Profesores:

Estefania Ferrera – Alejandro Juarez

Alumno: ………………………………………………………………………
División: …………

UNIDAD Nº 1

Los números complejos son la herramienta de trabajo del álgebra, análisis, así como de ramas de las matemáticas puras y aplicadas como variable compleja, ecuaciones diferenciales, aerodinámica y electromagnetismo entre otras de gran importancia. Además los números complejos se utilizan por doquier en matemáticas, en muchos campos de la física (notoriamente en la mecánica cuántica) y en ingeniería, especialmente en la electrónica y las telecomunicaciones, por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.

NÚMEROS COMPLEJOS

Números Complejos

En el conjunto de números complejos, se da respuesta a algunas de las operaciones que no tenían solución en el conjunto de números reales.
Hasta el momento, en el conjunto de números reales, las raíces de índice par y radicando negativo no poseían solución. En el nuevo conjunto de números se define a:

$$\boxed{\sqrt{-1} = i \quad o \;\; bien \;\; i^2 = -1}$$

Ya podemos realizar resolver ecuaciones que no tenían solución real:

$$x^2 + 4 = 0$$
$$x^2 = -4$$
$$|x| = \sqrt{-4} \implies |x| = \sqrt{-1.4} = 2i$$
$$|x| = 2i$$
$$x_1 = -2i \qquad\qquad x_2 = 2i$$

$$\boldsymbol{S = \{-2i\,;2i\}}$$

Un número complejo es un par ordenado de números reales $z = (a;b) \quad a, b \in \mathbb{R}$

Todo par ordenado, también se podrá escribir de la siguiente manera:

Parte Real *Parte Imaginaria*

$$z = a + bi$$

donde nos referiremos a "$\boldsymbol{a}$" como la parte real $(\Re e\;(z) = a)$, y a "$\boldsymbol{b}$" como la parte imaginaria $(\Im m\;(z) = b)$

A cualquiera de estas dos notaciones se las conoce como ***forma binómica*** del número complejo.

Llamaremos $\mathbb{C}$ al **conjunto de los números complejos** en los cuales se define una operación de suma y producto.

<u>Ejemplo</u>: hallar la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos

$z = 2 - 7i$ $\qquad \Re e\;(z) = 2 \qquad \Im m\;(z) = -7$

$z = 8i$ $\qquad \Re e\;(z) = 0 \qquad \Im m\;(z) = 8$

$z = -\sqrt{2} + \frac{1}{2}i$ $\qquad \Re e\;(z) = -\sqrt{2} \qquad \Im m\;(z) = \frac{1}{2}$

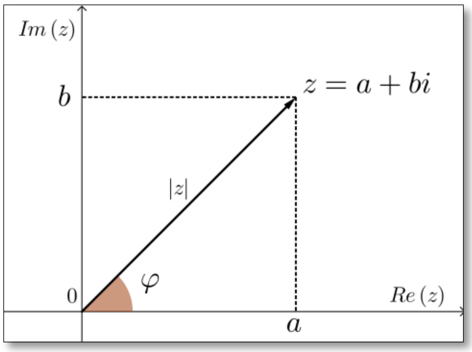
El conjunto de números complejos $\mathbb{C}$, es el más amplio de los conjuntos numéricos por eso $\mathbb{R}$ es un subconjunto de los complejos.

Representación gráfica de un Número Complejo

Para graficar un complejo en el plano real, se tiene en cuenta que el eje de abscisas recibe el nombre de **Eje Real** ($\Re e$) y el eje de ordenadas, **Eje Imaginario** ($\Im m$).

Para representar un número complejo utilizaremos lo visto anteriormente: *Un número complejo es un par ordenado de números reales* $z = (a; b) \quad a, b \in \mathbb{R}$

Se puede representar a un número complejo mediante un vector que tiene su origen en el origen de coordenadas y su extremo en el par ordenado que representa al número complejo.



Este vector que representa al número complejo "z", forma un ángulo con el eje horizontal llamado "***argumento***". La longitud de dicho vector se llama "***módulo***" del numero complejo "z"

Para hallar el valor del módulo aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El valor del argumento del número complejo se calcula de la siguiente forma:

$$\hat{\varphi} = Arg(z) = arc\ tg\ \left|\frac{b}{a}\right|$$

Cabe aclarar que dicho cálculo corresponde a ángulos del primer cuadrante. Si el ángulo pertenece a otro cuadrante deberemos tomar las siguientes consideraciones:

- Si el ángulo pertenece al 2º cuadrante: $\hat{\beta} = 180° - \hat{\varphi}$
- Si el ángulo pertenece al 3º cuadrante: $\hat{\beta} = 180° + \hat{\varphi}$
- Si el ángulo pertenece al 4º cuadrante: $\hat{\beta} = 360° - \hat{\varphi}$

Ejemplo: Hallar el módulo y el argumento de $z = 3 - \sqrt{3}i$

Calculamos el módulo: $|z| = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Si graficamos el complejo, observaremos que se encuentra en el 4to cuadrante:

$$\hat{\varphi} = arc\ tg\ \left|\frac{-\sqrt{3}}{3}\right| = arc\ tg\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30° \quad \rightarrow \quad \beta = 360° - 30° = 330°$$

Conjugado y Opuesto de un Números Complejos

A partir de un número complejo $z = a + bi$ se definen los siguientes números complejos:

- El **conjugado** de z es $\bar{z} = a - bi$ (la parte real es igual y la parte imaginaria es la opuesta).
- El opuesto de z es $-z = -a - bi$ (la parte real y la parte imaginaria son opuestas).

Ejemplos:

$z_1 = -1 - 2i$ $\quad \overline{z_1} = -1 + 2i$ $\quad -z_1 = 1 + 2i$

$z_2 = 8i$ $\quad \overline{z_2} = -8i$ $\quad -z_2 = -8i$

$z_3 = 7$ $\quad \overline{z_3} = 7$ $\quad -z_1 = -7$

EJERCICIO Nº 1: Completar la siguiente tabla

Numero Complejo	Parte Real	Parte Imaginaria	Par ordenado	Módulo	Argumento
2+7i					
	2	8			
	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$			
$-3-\sqrt{3}i$					
5i					
	- 4	0			

EJERCICIO Nº 2: Graficar los siguientes números complejos. Hallar su módulo y argumento

$a)\ z_1 = -3 - 4i$ $\quad b)\ z_2 = -2i$ $\quad c)\ z_3 = 1 - 3{,}5i$

$d)\ z_4 = 3 + 2i$ $\quad e)\ z_5 = -2 + 4i$ $\quad f)\ z_6 = -4 + i$

EJERCICIO Nº 3: Sabiendo que $z = 2 + 2i$, hallar los siguientes complejos:

$a)\ 2z$ $\quad b)\ -z$ $\quad c)\ \frac{1}{2}z$ $\quad d)\ \bar{z}$

Operaciones con Números Complejos

A partir de los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ se definen las siguientes operaciones entre números complejos:

- **Suma y Resta:** para sumar (restar) dos o más números complejos se suman (restan) ***parte real con parte real*** y ***parte imaginaria con parte imaginaria***.

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\, i$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)\, i$$

<u>Ejemplos</u>: $z_1 = -3 + 2i \qquad z_2 = 7 - 8i$

$$z_1 + z_2 = (-3 + 7) + \big(2 + (-8)\big)\, i = 4 + (-6)i = 4 - 6i$$

$$z_1 - z_2 = (-3 - 7) + \big(2 - (-8)\big)\, i = -10 + 10i$$

- **Multiplicación:** para multiplicar números complejos, se aplica la propiedad distributiva. Debe tenerse en cuenta que $i^2 = -1$

<u>Ejemplo</u>: $z_1 = -4 + 2i \qquad z_2 = 3 - 3i$

$$z_1 . z_2 = (-4 + 2i).(3 - 3i)$$

$$z_1 . z_2 = (-4).3 + (-4).(-3i) + 2i.3 + 2i.(-3i)$$

$$z_1 . z_2 = -12 + 12i + 6i - 6i^2 = -12 + 12i + 6i - 6.(-1)$$

$$z_1 . z_2 = -12 + 12i + 6i + 6$$

$$z_1 . z_2 = -6 + 18i$$

EJERCICIO Nº 4: Resolver las siguientes sumas y restas entre complejos:

$a)\ \left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{3}{2} + i\right) =$

$b)\ (2 + 3i) + (-1 - 2i) =$

$c)\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right) + \left(-1 + \frac{5}{3}i\right) + \frac{3}{2} =$

$d)\ (5 + 9i) - (4 + 2i) =$

$e)\ \left(-\frac{7}{2} + i\right) - \left(\frac{17}{10} - \frac{21}{5}i\right) =$

$f)\ (2 - 2i) - \left(\frac{1}{2} - i\right) + \left(2 + \frac{1}{2}i\right) =$

EJERCICIO Nº 5: Resolver las siguientes operaciones entre complejos:

$a)\ (1-5i).(2+3i) =$

$b)\ (3+2i).(4+3i) =$

$c)\ (-1+i)^2 =$

$d)\ (4-6i)^2 =$

$e)\ (1-i).(1+i) =$

$f)\ (3+i).(-1-i).(-3+i) =$

$g)\ \left(2+\frac{1}{2}i\right).\left(\frac{1}{2}+2i\right).2i =$

$h)\ \left(1+\frac{1}{3}i\right).\left(-1-\frac{1}{3}i\right) =$

- **División:** para resolver la división entre dos números complejos, siendo el **divisor no nulo**, multiplicamos tanto numerador como denominador por el conjugado del divisor.

Ejemplo: $z_1 = -4+2i \qquad z_2 = 3-3i$

$$z_1 : z_2 = \frac{-4+2i}{3-3i}$$

$z_1 : z_2 = \frac{(-4+2i)}{(3-3i)} . \frac{(3+3i)}{(3+3i)}$ aplicamos distributiva en numerador y denominador

$$z_1 : z_2 = \frac{(-4).3+(-4).3i+2i.3+2i.3i}{3.3+3.3i+(-3i).3+(-3i).3i} = \frac{-12-12i+6i+6i^2}{9+9i-9i-9i^2} = \frac{-12-12i+6i-6}{9+9i-9i+9}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{-18-6i}{18} = \frac{-18}{18} - \frac{6i}{18} \qquad z_1 : z_2 = -1-\frac{1}{3}i$$

EJERCICIO Nº 6: Resolver las siguientes divisiones entre complejos

$a)\ \frac{2+3i}{-1+3i} =$

$b)\ \frac{3-i}{-1+i} =$

$c)\ \frac{-3+5i}{1+i} =$

$d)\ \frac{10}{1+3i} =$

$e)\ \frac{1-i}{2+3i} =$

$f)\ \frac{2i}{-1+2i} =$

$g)\ \frac{1+i}{i} =$

$h)\ \frac{(1-2i).(2-i)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i} =$

EJERCICIO Nº 7: Resolver las siguientes operaciones entre complejos

$a)\ \frac{(2-i)+2.(2+3i)+7i}{(2+i)-(-1-2i)} =$

$b)\ \frac{(2-i)}{(1+2i)} . \frac{5.(2+3i)}{(2+i)} =$

$c)\ \frac{(2+i)+(2+3i)}{3i} . \frac{(1-2i)}{(2+i)} =$

$d)\ \frac{(2+3i).(-1+2i)+10}{(2+i)} + 1 =$

$e)\ \frac{(2+4i)}{(1-i)} - (-1+2i) + 1 =$

$f)\ \frac{(10+15i)}{(1-2i)} : \frac{(2+i)}{(-1+2i)} =$

Potencias de imaginarios

Teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, calculamos las sucesivas potencias de i

$i^0 = 1$ $\qquad$ $i^4 = i^3.i = -i.i = -i^2 = -(-1) = 1$

$i^1 = i$ $\qquad$ $i^5 = i^4.i = 1.i = i$

$i^2 = -1$ $\qquad$ $i^6 = i^5.i = i.i = i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$ $\qquad$ $i^7 = i^6.i = -1.i = -i$

Como podemos ver, los números 1, i, -1, $-i$ se repiten periódicamente. En general, para cualquier potencia de i , por ejemplo i^n debemos hallar el resto r de la división de n por 4.

$$i^n = i^r$$

EJERCICIO Nº 8: Calcular las siguientes potencias

$a)\ i^{127} =$ $\qquad$ $d)\ (i^9)^{27} =$

$b)\ i^{1042} =$ $\qquad$ $e)\ i^{11}.i^{33} =$

$c)\ i^{66} =$ $\qquad$ $f)\ i^{2022}: i^3 =$

EJERCICIO Nº 9: Resolver

$$a)\ \frac{1+i}{i} + \frac{i}{1-i} = \qquad b)\ \frac{(1+i)^2.\ i^{357}}{(3-i)^2\ .\ (-i)^{253}} = \qquad c)\ \frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}} =$$

EJERCICIO Nº 10: Hallar el valor de "x", para que $(2 + x\,i)^2$ sea:

a) Imaginario puro.

b) Un número real puro.

EJERCICIO Nº 11: Si $z = \frac{3k.i^{65}-4k.i^{82}}{2+i}$, hallar el valor de k para que se verifique: $Im(z) = 12$

EJERCICIO Nº 12: Si $z = \frac{2k.i^{15}-3k.i^{25}}{-3+i}$, hallar el valor de k para que se verifique: $Re(z) = 2$

EJERCICIO Nº 13: Calcular el complejo "z" que verifica:

$a)\ 2z + 3i = zi + (2 - i)$ $\qquad$ $d)\ \frac{z}{1+i} - 3 = z$

$b)\ z\,i + 2 = i.(1 + 3zi)$ $\qquad$ $e)\ (3 - 2i)\,.\,z + \frac{4+7i}{-2i^{18}-i} = \frac{41}{5} + \frac{13}{5}i$

$c)\ z.(2 - i) = z - i$ $\qquad$ $f)\ \frac{(2-i)\ .(z+4i)}{-3+i} + \frac{1}{2}i = -\frac{11}{2} + 3i^{55}$

Forma Polar y Trigonométrica de un Números Complejos

Como ya hemos dicho anteriormente, un número complejo puede ser representado por su vector posición. Es decir, el complejo z quedará perfectamente determinado por el módulo de dicho vector $|z|$ y el ángulo que forma con el eje real. A la medida del ángulo φ se la llama **Argumento de z**

Entonces, podremos escribir el complejo a partir de su módulo y argumento de la siguiente manera:

$$z = |z|_{\varphi}$$

FORMA POLAR DE Z

Ejemplo: Sea $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, expresarlo en forma polar

$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$ $\qquad \varphi = Arg(z) = arc\ tg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = 45°$ $\qquad z_1 = 2_{45°}$

Otra forma de expresar a z mediante el módulo y su argumento es utilizando las nociones de trigonometría vistas.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|} \rightarrow \quad a = |z|.\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{|z|} \rightarrow \quad b = |z|.\operatorname{sen}\varphi \end{array}\right\} z = a + ib = |z|.\cos\varphi + i.|z|.sen\varphi$$

Finalmente, sacando factor común el módulo, la forma hallada es la forma trigonométrica de z

$z = |z|.(\cos\varphi + i.sen\ \varphi)$ **FORMA TRIGONOMÉTRICA DE Z**

Ejemplo: Sea $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ expresarlo en forma trigonométrica

Como vimos en el ejemplo anterior, $|z| = 2$ y $\varphi = 45°$, entonces la forma trigonométrica del complejo es:

$$z_1 = 2.(\cos 45° + i.sen\ 45°)$$

Operaciones con Números Complejos en Forma Polar y Trigonométrica

Dados dos números complejos z_1 y z_2 , cuyos argumentos son φ y β respectivamente, definiremos las siguientes operaciones en forma polar y trigonométrica:

- **Multiplicación:**

$$\boldsymbol{z_1 . z_2 = |z_1| . |z_2| \left\lfloor \underline{\propto + \beta} \right.} \qquad \boldsymbol{z_1 . z_2 = |z_1| . |z_2| . [cos\ (\propto + \beta) + i . sen\ (\propto + \beta)]}$$

- **División:**

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left\lfloor \underline{\propto - \beta} \right.} \qquad \boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} . [cos\ (\propto - \beta) + i . sen\ (\propto - \beta)]}$$

- **Potenciación:**

$$\boldsymbol{{z_1}^n = |z_1|^n \left\lfloor \underline{n . \propto} \right.} \qquad \boldsymbol{{z_1}^n = |z_1|^n . [cos\ (n . \propto) + i . sen\ (n . \propto)]}$$

Esta última fórmula es conocida como ***Fórmula de De Moivre.***

EJERCICIO Nº 14: Expresar en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos:

$a)\ \left(\sqrt{3} + \sqrt{3}i\right)$ $\qquad d)\ \left(-2\sqrt{3}; 2\right)$

$b)\ \left(\sqrt{3} - i\right)$ $\qquad e)\ (-2; -2)$

$c)\ \left(1 - \sqrt{3}i\right)$ $\qquad f)\ (-4; 0)$

EJERCICIO Nº 15: Pasar a forma binómica

$a)\ (2; 45°)$ $\qquad d)\ (5; 150°)$

$b)\ (1; 330°)$ $\qquad e)\ (3; 180°)$

$c)\ (4; 225°)$ $\qquad f)\ \left(\sqrt{2}; 270°\right)$

EJERCICIO Nº 16: Realiza las siguientes operaciones en forma polar (o trigonométrica) y dar el resultado en forma binómica

$a)\ (4; \pi) : \left(2; \frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad d)\ (1 + i)^6$

$b)\ 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\ \frac{\pi}{6}\right) . 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ sen\ \frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad e)\ \left(1 + \sqrt{3}\,i\right)^4$

$c)\ \left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\ \frac{\pi}{6}\right)\right]^2$ $\qquad f)\ \left(3 + \sqrt{3}\,i\right)^7$

Respuestas

EJERCICIO Nº4

$a)\ \frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$ $\quad b)\ 1+i$ $\quad c)\ 1+2i$ $\quad d)\ 1+7i$ $\quad e)\ -\frac{26}{5}+\frac{26}{5}i$ $\quad f)\ \frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$

EJERCICIO Nº5

$a)\ 17-7i$ $\quad b)\ 6+17i$ $\quad c)\ 2i$ $\quad d)\ -20-48i$ $\quad e)\ 2$ $\quad f)\ 10+10i$ $\quad g)\ -\frac{17}{2}$ $\quad h)\ -\frac{8}{9}-\frac{2}{3}i$

EJERCICIO Nº6

$a)\ \frac{7}{10}-\frac{9}{10}i$ $\quad b)\ -2-i$ $\quad c)\ 1+4i$ $\quad d)\ 1-3i$ $\quad e)\ -\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$ $\quad f)\ \frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$ $\quad g)\ 1-i$ $\quad h)\ -5-5i$

EJERCICIO Nº7

$a)\ 3+i$ $\quad b)\ 4-7i$ $\quad c)\ -\frac{4}{3}-\frac{4}{3}i$ $\quad d)\ 2$ $\quad e)\ 1+i$ $\quad f)\ -7-4i$

EJERCICIO Nº8

$a)\ -i$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ -1$ $\quad d)\ -i$ $\quad e)\ 1$ $\quad f)\ -i$

EJERCICIO Nº9

$a)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ $\quad b)\ \frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$ $\quad c)\ 2+i$

EJERCICIO Nº10

$a)\ x_1=-2 \quad x_2=2$ $\quad b)\ x=0$

EJERCICIO Nº11

$k=30$

EJERCICIO Nº12

$k=-4$

EJERCICIO Nº13

$a)\ \frac{8}{5}-\frac{6}{5}i$ $\quad b)\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ $\quad c)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ $\quad d)\ -3+3i$ $\quad e)\ z=2+i$ $\quad f)\ z=7+2i$

EJERCICIO Nº14

$a)\ z=\sqrt{6}\,\lfloor\underline{45°}$ $\quad z=\sqrt{6}\,(\cos 45°+i.sen\,45°)$ $\quad d)\ z=4\,\lfloor\underline{150°}$ $\quad z=4\,(\cos\,150°+i.sen\,150°)$

$b)\ z=2\,\lfloor\underline{330°}$ $\quad z=2\,(\cos\,330°+i.sen\,330°)$ $\quad e)\ z=2\sqrt{2}\,\lfloor\underline{225°}$ $\quad z=2\sqrt{2}\,(\cos 225°+i.sen\,225°)$

$c)\ z=2\,\lfloor\underline{300°}$ $\quad z=2\,(\cos\,300°+i.sen\,300°)$ $\quad f)\ z=4\,\lfloor\underline{180°}$ $\quad z=4\,(\cos 180°+i.sen\,180°)$

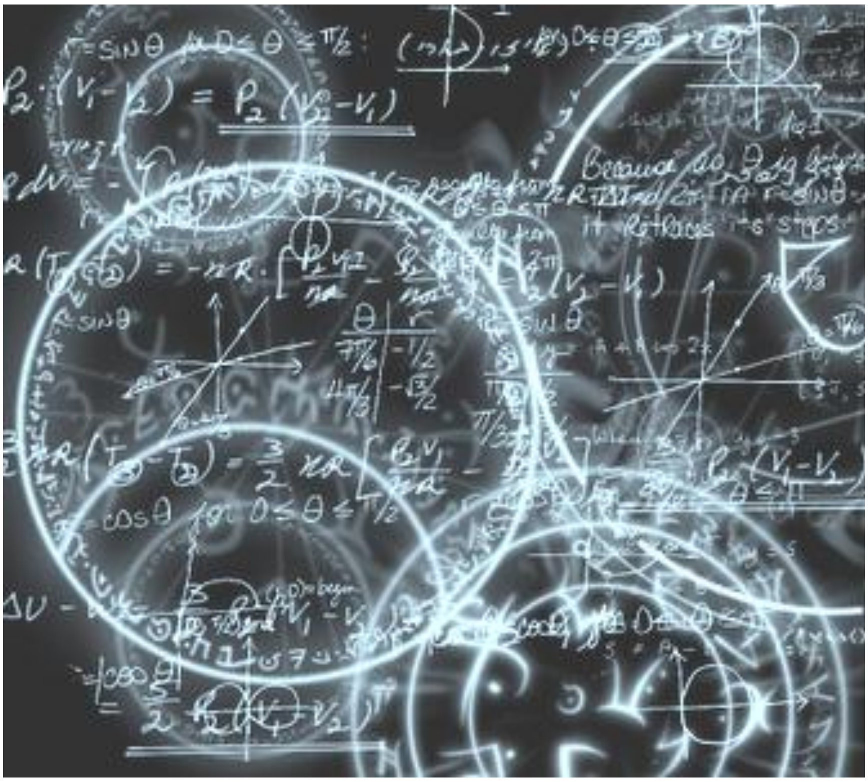
EJERCICIO Nº15

$a)\ z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ $\quad b)\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ $\quad c)\ z=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ $\quad d)\ z=-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$ $\quad e)\ z=-3$ $\quad f)\ z=\sqrt{2}i$

EJERCICIO Nº16

$a)\ z=-\sqrt{3}+i$ $\quad b)\ z=15i$ $\quad c)\ z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ $\quad d)\ z=-8i$ $\quad e)\ z=-8-8\sqrt{3}i$

UNIDAD Nº 2



Aunque implícita en el desarrollo del Cálculo de los siglos XVII y XVIII, la notación moderna del límite de una función se remonta a Bolzano (1817). Sin embargo, su trabajo no fue conocido mientras él estuvo vivo. Cauchy expuso límites en su *Cours d'analyse* (1821) y parece haber expresado la esencia de la idea, pero no de una manera sistemática. La primera presentación rigurosa de la técnica hecha pública fue dada por Weierstrass en los 1850 y 1860 y desde entonces se ha convertido en el método estándar para trabajar con límites.

LÍMITES Y CONTINUIDAD

NOCIÓN DE LÍMITE

En este capítulo se comenzará a manejar algunas herramientas del *cálculo diferencial*, empezando por el concepto de límite.

En matemática muchas veces es importante saber que sucede en ***zonas muy próximas*** a un punto sin necesidad de ver que ocurre en el punto propiamente. El límite es una herramienta que nos brinda esa información.

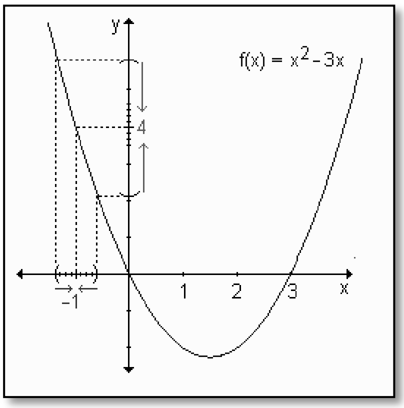
Empecemos analizando el siguiente ejemplo:

- *Dada la función* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - 3x$ *¿Cómo se comportan los valores de la función en las proximidades de* $x = -1$*? ¿Qué sucede con* $f(x)$ *cuando x tiende a -1?*

x tiende a -1 por izquierda → ← *x tiende a -1 por derecha*

x	-1,01	-1,001	-1,0001	…	-1	…	-0,9999	-0,999	-0,99
$f(x)$	**4,0501**	**4,005001**	**4,00050001**	**…**	**4**	**…**	**3,99950001**	**3,995001**	**3,9501**

$f(x)$ *tiende a 4* → ← $f(x)$ *tiende a 4*



Puede observarse que cuando x se aproxima a -1 por valores menores que él, los valores de la función se aproximan a 4. De la misma manera, cuando se eligen valores de x que se aproximan a -1 por valores mayores a él, la función se aproxima a 4.

NO interesa el valor de la función cuando $x = -1$

Este comportamiento de la función puede observarse en el grafico.

Se expresa de la siguiente manera:

"$El\ límite\ de\ la\ función\ x^2 - 3x\ es\ 4\ cuando\ x\ tiende\ a -1$"

Simbólicamente: $\lim_{x \to -1} x^2 - 3x = 4$

Veamos otro ejemplo:

- *Sea la función* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{3x^2-3}{x-1}$ *cuyo dominio es Dom* $f(x) = \{x: x \epsilon \mathbb{R} \quad x \neq 1\}$ *¿A qué valor se acerca* $f(x)$ *cuando x se aproxima a 1?*

Como $x = 1$ no pertenece al dominio de la función, $f(1)$ no está definida. Por ese motivo es necesario averiguar cuál es el valor al que se aproximan las ordenadas de la función para aquellos valores de las abscisas próximos a 1. Con ese objetivo, se construye una tabla de valores de f en la que x se acerca a 1 por valores menores que él, es decir, mediante números reales que están a su ***izquierda*** y otra tabla en la que x se acerca a 1 por valores mayores , es decir, que están a su ***derecha***.

x	$f(x)$
0,9	5,7
0,95	5,85
0,99	5,97
0,995	5,985
0,999	5,997

x	$f(x)$
1,1	6,3
1,05	6,15
1,01	6,03
1,005	6,015
1,001	6,003

Se observa que cuando x se acerca a $x = 1$ por derecha o por izquierda, los valores de la función se aproximan a seis (tiende a 6). Esto se expresa de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 6$$

El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a 1 es igual a 6

La función no está definida en $x = 1$, pero sin embargo, cuando x toma valores cada vez más próximos a uno, tanto por izquierda como por derecha, el valor al que tiende la función es seis.

Entonces:

- El número al cual tiende $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 por la izquierda y simbólicamente se escribe:

  $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 6$$

  Se llama ***"límite lateral por izquierda"***

- El número al cual tiende $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 por la derecha y simbólicamente se escribe:

  $$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 6$$

  Se llama ***"límite lateral por derecha"***

- Como ambos límites laterales son iguales, se expresa:

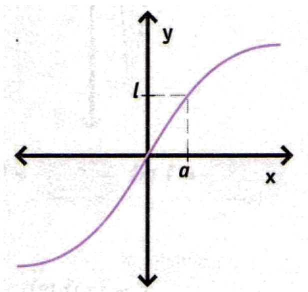
  $$\lim_{x \to 1} f(x) = 6$$

Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende al número real "a" es igual al número real L, si al aproximarse x a "a" por la izquierda y por la derecha, siendo $x \neq a$, resulta que $f(x)$ se aproxima a L. Se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Cuando se calcula el límite de una función en un punto de abscisa $x = a$, pueden presentarse las siguientes situaciones.

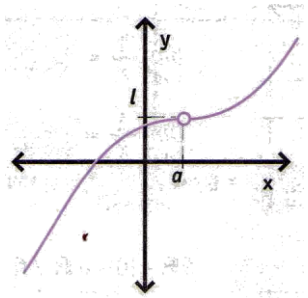
a pertenece al dominio de f y f es continua en dicho punto. En este caso, el límite coincide con la imagen de a



$a \in Dom\ f$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \end{array}\right\} \lim_{x\to a} f(x) = L$$

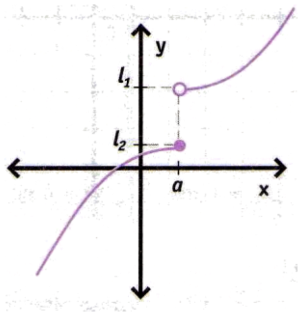
a no pertenece al dominio de f y los límites laterales coinciden. La función tiene límite en ese punto



$a \notin Dom\ f$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \end{array}\right\} \lim_{x\to a} f(x) = l$$

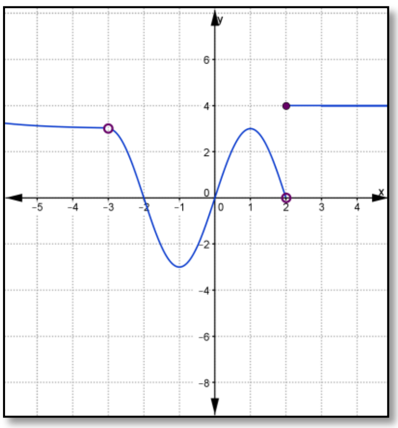
a pertenece al dominio de f y los límites laterales no coinciden. ***La función no tiene límite en ese punto***



$a \in Dom\ f$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1 \\ \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} l_1 \neq l_2 \Rightarrow \\ \nexists \lim_{x\to a} f(x) \end{array}$$

EJERCICIO Nº1: Observar las funciones definidas gráficamente y calcular, si existen, los límites pedidos para cada una:



$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \dots\dots\dots$

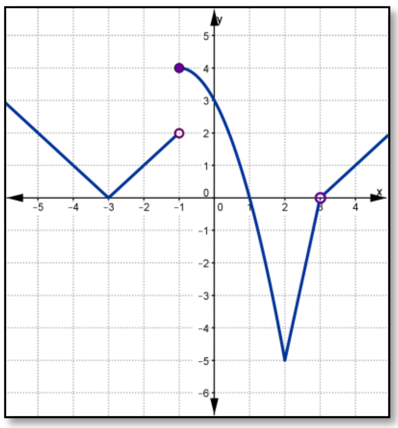
$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \dots.\dots$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \dots\dots.$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dots.\dots$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dots\dots.$



$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \dots\dots\dots$

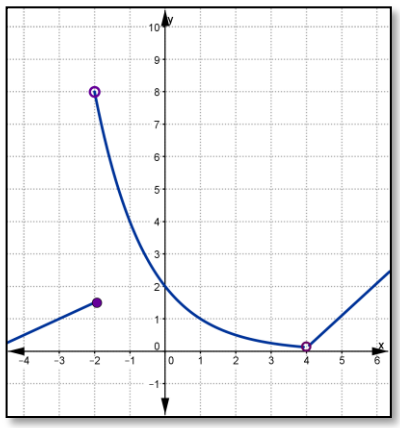
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \dots.\dots$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dots\dots.$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \dots\dots\dots$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \dots.\dots$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dots\dots.$



$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \dots.\dots$

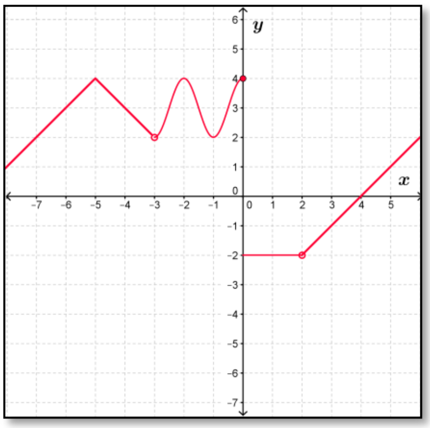
$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \dots\dots.$

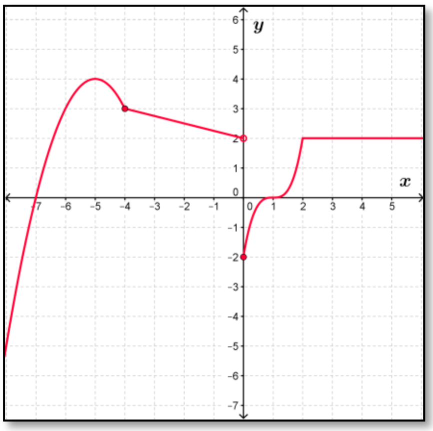
$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \dots\dots\dots$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \dots.\dots$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \dots\dots.$

EJERCICIO Nº 2: Observa los siguientes gráficos y halla los límites pedidos en cada caso:





$\lim_{x\to -3^-} f(x) =$ … … … … $\quad$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ … … … … $\quad$ $\lim_{x\to 0^-} g(x) =$ … … … …

$\lim_{x\to -3^+} f(x) =$ … … . …. $\quad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$ … … . …. $\quad$ $\lim_{x\to 0^+} g(x) =$ … … . ….

$\lim_{x\to -3} f(x) =$ … … . … … $\quad$ $\lim_{x\to 0} f(x) =$ … … . … … $\quad$ $\lim_{x\to 0} g(x) =$ … … . … …

$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ … … . … … $\quad$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ … … . … … $\quad$ $\lim_{x\to -4^-} g(x) =$ … … . …

EJERCICIO Nº 3: Graficar cada una de las siguientes funciones y calcular $\lim_{x\to 3} f(x)$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 3 \\ 3x - 3 & x \geq 3 \end{cases}$ $\qquad$ *b)* $f(x) = \begin{cases} 5 & x \leq 3 \\ x^2 - 5 & x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2^x & x < 3 \\ \sqrt{x-3} & x \geq 3 \end{cases}$ $\qquad$ *d)* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & x < 3 \\ 4x - 10 & x \geq 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 3 \\ -\frac{1}{2}x + 2 & x \geq 3 \end{cases}$ $\qquad$ *f)* $f(x) = \begin{cases} -2 & x < 3 \\ -x + 1 & x \geq 3 \end{cases}$

EJERCICIO Nº 4: Graficar las siguientes funciones y calcular los límites en los puntos pedidos en cada caso:

$a)\ f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases} \quad para\ x \to 0$ $\qquad$ $b)\ g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si\ x < 1 \\ 3 & si\ x = 1 \\ 2x - 2 & si\ x > 1 \end{cases} \quad para\ x \to 1$

$c)\ h(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x < 2 \\ 5 & si\ x = 2 \\ 3 - x & si\ x > 2 \end{cases} \quad para\ x \to 2$ $\qquad$ $d)\ m(x) = \begin{cases} |x + 1| & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x^2 + 4x & si\ x \geq 2 \end{cases} \quad para\ x \to 0\ \ y\ para\ x \to 2$

EJERCICIO Nº 5: Graficar las siguientes funciones y hallar los límites en los puntos de cambio de funciones:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} -x-3 & si \quad x\le -2\\ -x^2+2x+4 & si\ -2<x\le 4\\ x-8 & si \quad x>4\end{cases}$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases} 5 & si \quad x\le -3\\ -2x-1 & si\ -3<x\le 1\\ (x-1)^2-1 & si\ \ 1<x\le 3\\ -x+6 & si \quad x>3\end{cases}$$

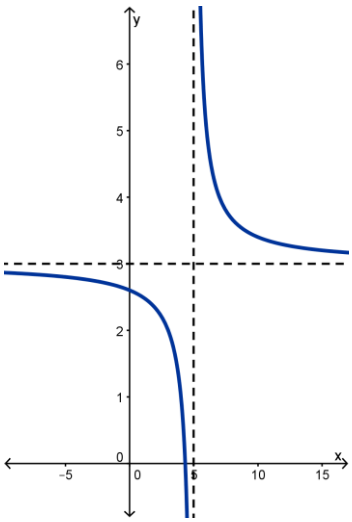
$$c)\ f(x)=\begin{cases} -x-2 & si \quad x\le -2\\ log(x+3) & si\ -2<x\le 4\\ 2^{x-4} & si \quad x>4\end{cases}$$

$$d)\ f(x)=\begin{cases} \frac{x-2}{x+3} & si \quad x\le -4\\ 8-|x+2| & si\ -4<x\le 2\\ 2 & si\ \ 2<x<5\\ (x-5)^2+2 & si \quad x>5\end{cases}$$

Límites y el infinito

Como acabamos de ver, el valor del límite indica el valor al que tiende la función cuando x se aproxima o tiende a cierto valor. Analicemos el siguiente ejemplo para profundizar el tema.
Sea la función $f(x)$ cuyo gráfico se muestra a continuacion:

- *Cuando las valores de x se aproximan a 5 "por la derecha", $f(x)$ toma valores cada vez mayores. Se dice entonces que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 5 por derecha es más infinito" y se lo simboliza de la siguiente manera:*
  $\lim_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$
- *Cuando las valores de x se aproximan a 5 "por la izquierda", $f(x)$ toma valores cada vez menores. Se dice entonces que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 5 por izquierda es menos infinito" y se lo simboliza de la siguiente manera:*
  $$\lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$$



- *Cuando las valores de x son cada vez mayores, $f(x)$ toma valores cada vez más próximos a 3. Se dice entonces que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito es 3" y se lo simboliza de la siguiente manera:*
  $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$$
- *Cuando las valores de x son cada vez menores, $f(x)$ toma valores cada vez más próximos a 3. Se dice entonces que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es 3" y se lo simboliza de la siguiente manera:*
  $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$$

Cálculo de Límites

Para "calcular" un límite en forma analítica, debemos reemplazar el valor al que tiende la variable en la función. Este resultado será el valor al que tiende la función, es decir, el límite.

Ejemplo: Calcular el límite de la siguiente función $f(x) = \frac{x^2+5x+7}{x+1}$ cuando x tiende a 2

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x+7}{x+1} = \frac{2^2+5.2+7}{2+1} = \frac{21}{3} = 7$$

EJERCICIO Nº6: Calcular los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 2} \sqrt{3x-2} =$

b) $\lim_{x\to 0} \sqrt{2x+1} =$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{3x-4}{x^2} =$

d) $\lim_{x\to 10} \left(1-\frac{6}{x}\right) =$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{2x-5x^2+16}{x^2+5x-1} =$

f) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{x^2-1}{2x^3+x^2-2} =$

g) $\lim_{x\to \sqrt{7}} \frac{3x^2-21}{4x^2+3} =$

h) $\lim_{x\to 3} \frac{5x-10}{x^2-9} =$

i) $\lim_{x\to 4} \left(5-\frac{x-3}{x^2-3x}\right) =$

j) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{6x}{x^3+x-2}\right) =$

Propiedades de los límites

Si $\lim_{x\to a} f(x) = m$ y $\lim_{x\to a} g(x) = k$, siendo m y k números reales, se verifican las siguientes propiedades:

- $lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = m+k$
- $lim_{x\to a}[c\,.\,f(x)] = c\,.\,m$
- $lim_{x\to a}[f(x)\,.\,g(x)] = m\,.\,k$
- $lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{m}{k}$ *(sólo si $k \neq 0$)*

Ejemplos:

Si $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ y $\lim_{x\to 2}(x+1) = 3$ $\Rightarrow$

- $\lim_{x\to 2}[x^2+(x+1)] = 4+3 = 7$
- $\lim_{x\to 2}(5\,.\,x^2) = 5\,.\,4 = 20$
- $\lim_{x\to 2}[x^2\,.\,(x+1)] = 4\,.\,3 = 12$
- $\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{(x+1)} = \frac{4}{3}$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = m \ (m \neq 0)$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} h(x) = \infty$, entonces:

- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{m}{0} = \infty$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{m}{\infty} = 0$

Ejemplos:

$\lim_{x\to 0} \ (x+1) = 1$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, $\lim_{x\to 0} x^{-1} = \infty$ $\Rightarrow$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x} = \infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^{-1}} = 0$

EJERCICIO Nº7: Si $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = \sqrt{x} + 2$, calcular:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 2}[f(x) - f(0)]$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 1}[g(x) + g(9)]$

$c)$ $\lim\limits_{x\to 1}[g(x) + g(0)]$

$d)$ $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{f(2) + g(2)}{f(x)}\right]$

EJERCICIO Nº8: Si $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$ calcular el valor de:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{2.f(x)}{g(x)}\right]$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{f(x).g(x)}{2}\right]$

$c)$ $\lim\limits_{x\to 2}[2 + f(x) + g(x)]$

$d)$ $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{f(x) + 5}{g(x)}\right]$

EJERCICIO Nº9: Si $\lim_{x\to 2} f(x) = a$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = b$ con $a \neq 0$ calcular

$a)$ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-5.g(x)}{2.f(x)}$

$b)$ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{g(x)}{2.f(x)} + g(x)\right) =$

Indeterminaciones

En algunos casos ocurre que al intentar hallar un límite por cálculo directo se obtiene una expresión en la cual no es posible concluir cuál será la tendencia. A estos casos se los llama ***indeterminaciones.***
Algunas de las interminaciones que pueden presentarse con las siguientes:

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} ; \frac{\infty}{\infty} ; \infty - \infty ; \mathbf{1}^{\infty} ; \infty^{\mathbf{0}} ; \mathbf{0} . \ \infty ; \mathbf{0}^{\mathbf{0}}$$

Se trabajará con ciertos recursos algebraicos que sirven para resolver algunos casos del tipo de las tres primeras.

- ## Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

CASO 1: Cociente de polinomios

Para salvar indeterminaciones de este tipo, es posible reducir el cociente planteado a otro cuyo denominador no sea cero, factorizando el numerador y/o denominador y cancelando los factores comunes a ambos.
Recordar que la regla de Ruffini es una herramienta muy útil para la factorización de polinomios ya que conocemos una de las raíces que justamente es el valor al que tiende la variable.
En los límites donde la variable ***tiende a cero*** y se presenta esta indeterminación es posible sacar factor común en cada polinomio y luego simplificar.

Ejemplos:

$a)$ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

$b)$ $\lim_{\ x\to 3} \frac{2x-6}{x^2-6x+9} = \frac{0}{0} = \lim_{\ x\to 3} \frac{2\,\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{2}}} = \lim_{\ x\to 3} \frac{2}{x-3} = \infty$

CASO 2: Cociente de expresiones con radicales

Para salvar indeterminaciones de este tipo, se debe racionalizar la expresión con radicales. A diferencia de cuando trabajábamos con expresiones irracionales, donde solo se racionalizaba el denominador, será indistinto racionalizar expresiones que se encuentren en el numerador y/o denominador para luego de operar poder simplificar factores entre ambos.

Ejemplos:

$a)$ $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x^2-1)\,.\,(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\,(x+1)\,(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$

$b)$ $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-3}-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-3}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x})+2} \cdot \frac{\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}+1} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{2}$

• Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Para salvar indeterminaciones de este tipo, se deben dividir numerador y denominador de la función por x^n, siendo n el mayor de los grados de las funciones polimoniales. Luego se aplican las propiedades de los límites.

Ejemplos:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{2x^2-3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{3}{x^3}}_{\to 0}}=\infty$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x^5-5x}{x^3+7x+3x^5}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^5}+\frac{8x^5}{x^5}-\frac{5x}{x^5}}{\frac{x^3}{x^5}+\frac{7x}{x^5}+\frac{3x^5}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\frac{1}{x^3}}^{\to 0}+8-\overbrace{\frac{5}{x^4}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{7}{x^4}}_{\to 0}+3}=\frac{8}{3}$$

EJERCICIO Nº10: Resolver los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-x^2}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x+5}{x^2-25}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-10x^3+27x^2-2x-40}{x^3+2x^2-15x-36}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2-4}=$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+x^5+15x^2}{x^3-11x^4+3x^2}=$

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+5x^2+3x-9}=$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-6x^2+8x-3}$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-16x+20}{x^3+3x^2-24x+28}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^7+14x^3+16x^5}{2x^3-8x^5+3x^8}=$

k) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-5x^2-8x+48}{x^3-7x^2+8x+16}$

l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+4x^3-2x^2-12x+9}{x^3+3x^2-9x+5}$

EJERCICIO Nº11: Resolver los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}=$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}=$

e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}=$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{1+x}=$

h) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{10+x}-3}{1+x}=$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=$

j) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{x+2}-1}=$

k) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=$

l) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{5}}=$

EJERCICIO Nº12: Resolver los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x^7+2x^5-14}{5-x^4-x^8+4x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x^{11}+2x^5-10}{7-x^4-x^{15}+4x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x^3+2x^4-14}{8x^4-2x^3+4x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6+x^4+x^5-5}{4x+x^4-2x^3+5x^5}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^4-12x^9+1}{3-x^5-7x^8}=$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x^7+2x^5-14}{x^4-2x^7+4x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^8-5x^7+7}{1+2x^5+x^8}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x+5}{x^2-2x-3}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+4x^3+4x}{x^2+5x^9+6}$

• Indeterminación del tipo 1^{∞}

Existe una sucesión muy especial, la sucesión: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Si desarrollamos la sucesión observaremos que a medida que los términos crecen, la sucesión se aproxima a un número particular:

n	1	2	3	4	...	100	...	1.000	...	10.000	...
a_n	2	2,25	2,37037	2,441406	...	2,704813	...	2,716923	...	2,718145	...

A medida que $n \to \infty$ la sucesión se acerca a $e = 2{,}718281828\ldots$

Simbólicamente: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Es por este motivo que la indeterminación 1^{∞} esta relacionada con el número e.

Para salvar indeterminaciones de este tipo, debemos transformar la expresión que tengamos a una expresión de la forma mostrada. Recordemos que si multiplicamos y dividimos por un mismo número a una expresión, esta no se modifica.

<u>Ejemplos</u>:

$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{1}{4x}}_{\to 0}\right)^x = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\overbrace{\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{x.4}}^{\to e}{}^{.\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}$

$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x/2}\right)^{x.\left(-\frac{1}{2}\right).(-2)} = e^{-2}$

EJERCICIO Nº13: Resolver los siguientes límites.

$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^x$ $\quad b)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x$ $\quad c)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{5x}\right)^x$

$d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}$ $\quad e)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{6x}$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{7x}\right)^{14x}$

$g)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{6x}$ $\quad h)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}$ $\quad i)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{5x}\right)^{10x}$

EJERCICIO Nº14: Resolver los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^{11}+\frac{1}{3}x^8-2x-11}{2x^3+x^{11}-\frac{5}{4}} =$ $\quad c)\ lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{6x}\right)^{12x} =$ $\quad e)\ lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-6x^2+8x-3} =$

$b)\ lim_{x\to 0}\frac{2x^7+14x^3+16x^5}{2x^3-8x^5+3x^8} =$ $\quad d)\ lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} =$ $\quad f)\ lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{5}} =$

Continuidad

La idea intuitiva de función continua en un punto es bien sencilla. Una función continua en un punto es aquella que no "da saltos", aquella que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Matemáticamente, el concepto es más formal:

Una función es continua en un punto de abscisas $x = a$ si se verifican tres condiciones:

I. Que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ $\left(\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)\right)$

II. Que exista $f(a)$

III. Que coincidan el límite y la imagen de la función en ese punto, es decir: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

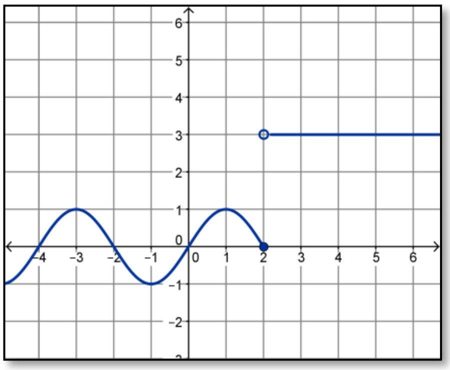
Si NO se cumple la condición I, se dice que en $x = a$ existe una ***Discontinuidad Esencial o inevitable***

Si NO se cumple la condición II o III, se dice que en $x = a$ existe una ***Discontinuidad Evitable***

En las funciones por tramos, es importante estudiar los *puntos de división de intervalos* donde están definidas las funciones. En dichos puntos los límites laterales deben coincidir para la existencia del límite.

Ejemplos:

a) Analizar la continuidad de la siguiente función en el punto $x = 2$

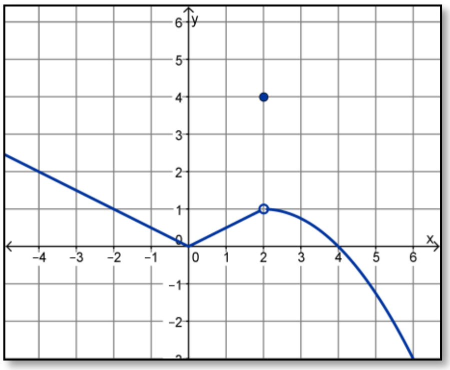


I) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$ $\quad\therefore\quad \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$

En $x = 2$, $f(x)$ presenta una DISCONTINUIDAD ESENCIAL

b) Analizar la continuidad de la siguiente función en el punto $x = 2$



I) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$ $\quad\therefore\quad \lim_{x \to 2} f(x) = 1$

II) $f(2) = 4$

III) $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

En $x = 2$, $f(x)$ presenta una DISCONTINUIDAD EVITABLE

La pregunta que puede surgir es ¿en qué puntos se debe estudiar la continuidad de una función?

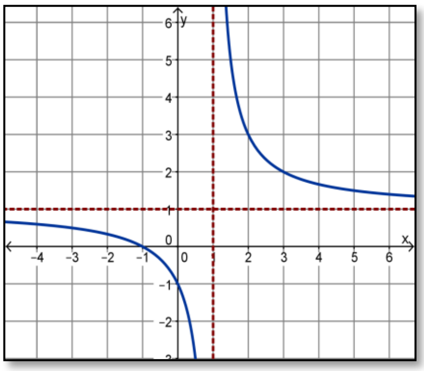
1. *Existen funciones que no están definidas para ciertos puntos, que están excluidos del dominio. Como no están definidos, sabemos que existe una discontinuidad. Se deben analizar esos puntos fuera del dominio para clasificar el tipo de discontinuidad de la función.*

2. *Los puntos de división de intervalos donde están definidas las funciones por tramos.*

3. *Los puntos que sean pedidos en los ejercicios. Muchas veces se suele pedir el análisis de la continuidad en algunos puntos particulares donde se tenga interés.*

También existen funciones que no presentan discontinuidades, como por ejemplo los polinomios. En dicho caso, cuando se pide estudiar la continuidad de ese tipo de funciones, bastará decir que son *Continuas en todo su dominio.*

c) Analizar los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$



- ✓ Se halla el dominio de la función: $Dom\ f = R - \{1\}$
- ✓ Como $x = 1$ no pertenece al dominio, analizaremos el tipo de discontinuidad en ese punto.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ $\quad\quad$ $\therefore\ \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$

En $x = 1$, $f(x)$ presenta una DISCONTINUIDAD ESENCIAL

d) Estudiar la continuidad de la función $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+5} & x \leq 2 \\ x - \frac{12}{7} & x > 2 \end{cases}$

La función $g(x)$ está compuesta por dos funciones:

- $\frac{2}{x+5}$ cuyo dominio es $Dom = (-\infty; -5) \cup (-5; 2]$
- $x - \frac{12}{7}$ cuyo dominio es $Dom = (2; +\infty)$

Por lo tanto, de la primera función tenemos un punto de discontinuidad que estudiar $x = -5$

También se debe estudiar que sucede en el punto $x = 2$ (cambio de funciones)

$\boldsymbol{x = -5}$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to -5^-} g(x) = -\infty$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to -5^+} g(x) = +\infty$ $\quad\quad$ $\therefore\ \nexists \lim_{x\to -5} g(x)$

En $x = -5$, $g(x)$ presenta una DISCONTINUIDAD ESENCIAL

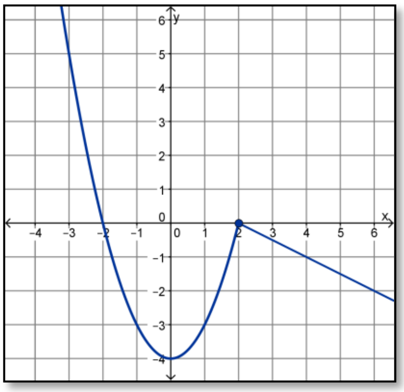
$\boldsymbol{x = 2}$ $\quad\quad$ **I)** $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \frac{2}{2+5} = \frac{2}{7}$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to -2^+} g(x) = 2 - \frac{12}{7} = \frac{2}{7}$ $\quad\quad$ $\therefore\ \lim_{x\to 2} g(x) = \frac{2}{7}$

II) $g(2) = \frac{2}{2+5} = \frac{2}{7}$

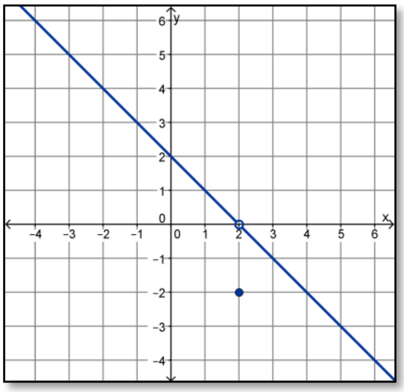
III) $\therefore\ \lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = \frac{2}{7}$ $\quad\quad$ $\therefore\ g(x)$ es CONTINUA en $x = 2$

EJERCICIO Nº15: Completar el cuadro considerando los siguientes gráficos:

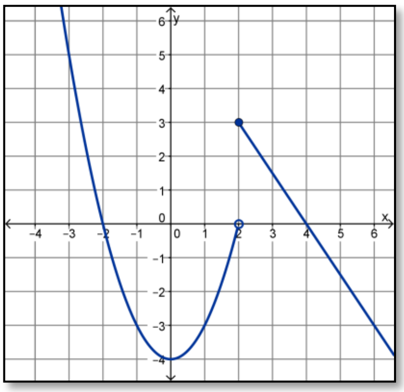
$a)$



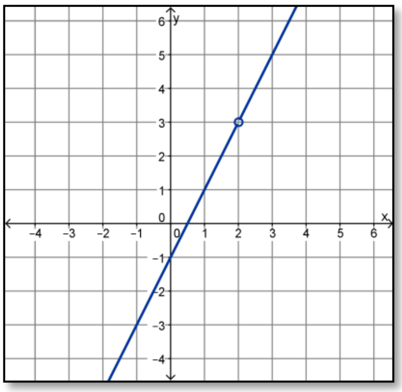
$b)$



$c)$



$d)$



	$f(2)$	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$	$¿f(x)$ *es continua en* $x = 2?$
$a)$					
$b)$					
$c)$					
$d)$					

EJERCICIO Nº16: Completar el siguiente cuadro:

$f(a)$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$¿f(x)$ *es continua en* $x = a?$
2	5	2		
-1	-1	-1		
$\nexists$	2	2		

EJERCICIO Nº17: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. Graficar.

$a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & x \leq 2 \\ \frac{x+1}{12} & x > 2 \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{4-x} & x < 7 \\ x^2 - 49 & x > 7 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x + 3 & si\ -2 < x \leq 2 \\ -(x-2)^2 + 5 & si \quad x > 2 \end{cases}$

$d)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+3} & si \quad x \leq -4 \\ 8 - |x+2| & si\ -4 < x \leq 2 \\ 2 & si\ \ 2 < x < 5 \\ (x-5)^2 + 2 & si \quad x > 5 \end{cases}$

EJERCICIO Nº18: Hallar el valor de h para que f sea una función continua en cada caso.

$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + h & x < 2 \\ 5 & x \geq 2 \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + hx & x \leq 2 \\ hx + 3h & x > 2 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} 3^{hx} & x < 0 \\ x + 4h & x \geq 0 \end{cases}$

EJERCICIO Nº19: Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua. Justificar.

$a)\ f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \leq 2 \\ ax + 6 & x > 2 \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x} & x < -1 \\ ax & x \geq -1 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} \frac{4x-8}{x} & x < -4 \\ a & -4 \leq x \leq 2 \\ bx & x > 2 \end{cases}$

$d)\ f(x) = \begin{cases} 2x + a & x < -5 \\ b & -5 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x+5} & x > 4 \end{cases}$

Respuestas

EJERCICIO Nº 1

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 3$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 4$ $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 8$

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 3$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 2$ $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 1{,}5$

$\lim_{x\to -3} f(x) = 3$ $\lim_{x\to -1} f(x) = \nexists$ $\lim_{x\to -2} f(x) = \nexists$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$ $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \nexists$ $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$

EJERCICIO Nº2

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 2$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$ $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 2$ $\lim_{x\to -4^+} g(x) = 3$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 2$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$ $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -2$ $\lim_{x\to -4} g(x) = 3$

$\lim_{x\to -3} f(x) = 2$ $\lim_{x\to 0} f(x) = \nexists$ $\lim_{x\to 0} g(x) = \nexists$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -2$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$ $\lim_{x\to -4^-} g(x) = 3$

EJERCICIO Nº3

a) $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$ *b)* $\lim_{x\to 3} f(x) = \nexists$ *c)* $\lim_{x\to 3} f(x) = \nexists$

d) $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ *e)* $\lim_{x\to 3} f(x) = \nexists$ *f)* $\lim_{x\to 3} f(x) = -2$

EJERCICIO Nº4 $a)\ \lim_{x\to 0} f(x) = \nexists$ $b)\ \lim_{x\to 1} g(x) = 0$ $c)\ \lim_{x\to 2} f(x) = 1$

$d)\ \lim_{x\to 0} m(x) = 1$ $\lim_{x\to 2} m(x) = \nexists$

EJERCICIO Nº5 $a)\ lim_{x\to -2} f(x) = \nexists$ $lim_{x\to 4} f(x) = -4$

$b)\ lim_{x\to -3} f(x) = 5$ $lim_{x\to 1} f(x) = \nexists$ $lim_{x\to 3} f(x) = 3$

$c)\ lim_{x\to -2} f(x) = 0$ $lim_{x\to 4} f(x) = \nexists$

$d)\ lim_{x\to -4} f(x) = 6$ $lim_{x\to 2} f(x) = \nexists$ $lim_{x\to 5} f(x) = 2$

EJERCICIO Nº6

$a)\ 2$ $b)\ 1$ $c)\ -1$ $d)\ \frac{2}{5}$ $e)\ 0$ $f)\ \frac{1}{2}$ $g)\ 0$ $h)\ \infty$ $i)\ \frac{19}{4}$ $j)\ \infty$

EJERCICIO Nº7

$a)\ 4$ $b)\ 8$ $c)\ 5$ $d)\ \frac{8+\sqrt{2}}{3}$

EJERCICIO Nº8

$a)\ -\frac{4}{3}$ $b)\ -3$ $c)\ 1$ $d)\ -\frac{7}{3}$

EJERCICIO Nº9

$a)\ \frac{a-5b}{2a}$ $b)\ \frac{b.(1+2a)}{2a}$

EJERCICIO Nº10 $a)\ 3$ $b)\ -\frac{1}{2}$ $c)\ -\frac{1}{10}$ $d)\ -\frac{10}{49}$ $e)\ \frac{2}{9}$ $f)\ 5$ $g)\ \frac{1}{2}$ $h) \infty$ $i)\ \frac{7}{9}$

$j)\ 7$ $k)\ \frac{7}{5}$ $l)\ \frac{8}{3}$

EJERCICIO Nº11 $a)\ \frac{1}{4}$ $b)\ \frac{1}{2}$ $c)\ 6$ $d)\ \frac{\sqrt{3}}{6}$ $e)\ \frac{1}{4}$ $f)\ 2$ $g)\ \frac{1}{4}$ $h)\ \frac{1}{6}$ $i)\ 2\sqrt{2}$

$j)\ \frac{1}{2}$ $k)\ \frac{\sqrt{3}}{3}$ $l)\ \frac{\sqrt{5}}{2}$

EJERCICIO Nº12 $a)\ 0$ $b)\ 0$ $c)\ \frac{1}{4}$ $d)\ \infty$ $e)\ \infty$ $f)\ -\frac{1}{2}$ $g)\ 4$ $h)\ \infty$ $i)\ 0$

EJERCICIO Nº13 $a)\ e^{\frac{1}{5}}$ $b)\ e^{7}$ $c) e^{\frac{2}{5}}$ $d)\ e^{15}$ $e)\ e^{-2}$ $f) e^{-12}$ $g)\ e^{-4}$ $h)\ e^{10}$ $i)\ e^{-8}$

EJERCICIO Nº14 $a)\ 1$ $b)\ 7$ $c)\ e^{-10}$ $d)\ \frac{1}{6}$ $e)\ \infty$ $f) \frac{\sqrt{5}}{2}$

EJERCICIO Nº15

	$f(2)$	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$	$¿f(x)$ *es continua en* $x=2?$
$a)$	0	0	0	0	si
$b)$	-2	0	0	0	no
$c)$	3	0	3	$\nexists$	no
$d)$	$\nexists$	3	3	3	no

EJERCICIO Nº16

$f(a)$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$¿f(x)$ *es continua en* $x=a?$
2	5	2	$\nexists$	No
-1	-1	-1	-1	Si
$\nexists$	2	2	2	No

EJERCICIO Nº17

$a)$ *En* $x=-2$ *DISCONTINUA ESENCIAL* *En* $x=2$ *CONTINUA*

$b)$ *En* $x=4$ *DISCONTINUA ESENCIAL* *En* $x=7$ *DISCONTINUA ESENCIAL*

$c)$ *En* $x=-2$ *CONTINUA* *En* $x=2$ *DISCONTINUA ESENCIAL*

$d)$ *En* $x=-4$ *CONTINUA* *En* $x=2$ *DISCONTINUA ESENCIAL* *En* $x=5$ *DISCONTINUA EVITABLE*

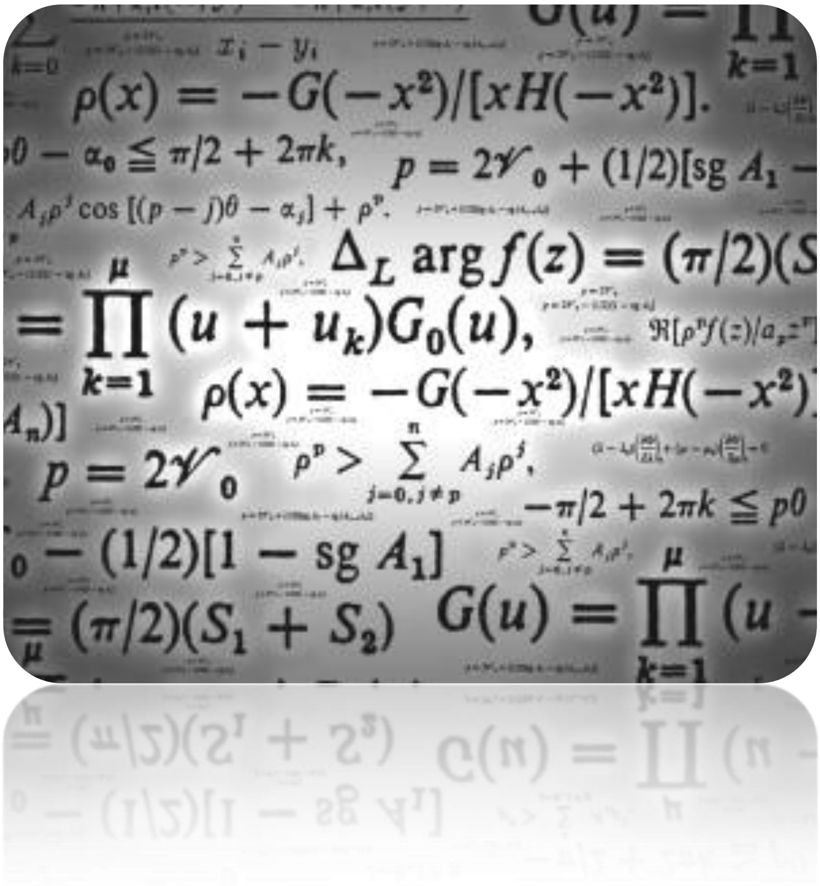
EJERCICIO Nº18

$a)\ \ h=1$ $b)\ \ h=\frac{4}{3}$ $c)\ \ h=\frac{1}{4}$

EJERCICIO Nº19

$a)\ \ a=-\frac{1}{2}$ $b)\ \ a=-2$ $c)\ \ a=6 \quad b=3$ $d)\ \ a=13 \quad b=3$

UNIDAD Nº 3

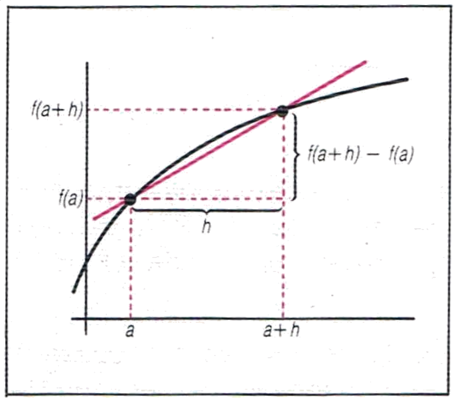


DERIVADAS

El concepto de derivada es uno de los dos conceptos centrales del cálculo infinitesimal... A su vez, este concepto central del cálculo está basado en el concepto de límite, el cual separa las matemáticas previas, como el Álgebra, la Trigonometría o la Geometría Analítica, del Cálculo. Quizá la derivada es el concepto más importante del Cálculo Infinitesimal.

La derivada es un concepto que tiene variadas aplicaciones. Se aplica en aquellos casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación. Es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología, o en ciencias sociales como la Economía y la Sociología.

Concepto de Derivada



Antes de comenzar recordaremos algunos conceptos de años anteriores:

La ecuación de una recta, en forma cartesiana, es de la forma: $f(x) = m.x + b$, donde el valor de m es la pendiente de la recta. Para calcular la pendiente entre dos puntos, por ejemplo: $x_1 = a$ $x_2 = b$

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si observamos el gráfico, notaremos que sobre la curva existen dos puntos, $(a; f(a))$ y el punto $(a + h; f(a + h))$. Para calcular la recta que pasa por dichos puntos, calculamos la pendiente en primer lugar.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si el valor de h se hace cada vez más pequeño, los puntos tienden a coincidir y así, la recta que tendremos será una recta tangente a la curva mostrada.
Justamente, el ***concepto de derivada*** está ligado a esto:

La derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente a una curva en dicho punto.

En notación matemática, podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

<u>Notación</u>: $f'(a)$ $\quad derivada\ primera\ de\ la\ función\ f\ en\ el\ punto\ x = a$

Para obtener la derivada de una función concreta en un punto, resulta cómodo llegar a la obtención del límite mediante cuatro pasos:

1º. Se calcula $f(a + h)$

2º. Se le resta $f(a)$ a la expresión anterior: $f(a + h) - f(a)$

3º. Se divide el resultado entre h: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

4º. Se calcula el $\lim\limits_{h \to 0}$ del cociente anterior $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Ejemplo: Hallar la derivada de $f(x) = 3x + 4$ en el punto $a = 5$

Utilizando lo anterior:

1º. $f(a+h) = f(5+h) = 3.(5+h) + 4 = 15 + 3h + 4 = 19 + 3h$

2º. $f(a+h) - f(a) = f(5+h) - f(5) = 19 + 3h - 19 = 3h$

3º. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$

4º. $f'(5) = \lim_{h\to 0} 3 = 3$

EJERCICIO Nº1: Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones en el punto indicado.

$a)\ f(x) = \sqrt{x+3} + 2 \qquad a = -1$

$b)\ f(x) = -x^2 + 2x \qquad a = 3$

$c)\ f(x) = x^3 - 1 \qquad a = 1$

$d)\ f(x) = \frac{1}{x+2} \qquad a = 0$

EJERCICIO Nº2: Un negocio está prosperando de tal manera que su ganancia total (acumulada) después de t años es $G(t) = 1000.t^{\,2}$ dólares.

a) ¿Cuál será la ganancia total durante el tercer año (es decir entre t = 2 y t = 3)?

b) ¿Cuál será el promedio de ganancia (ganancia promedio marginal) durante la primera mitad del tercer año?

c) ¿Cuál es la ganancia marginal para t = 2? (la ganancia marginal es $G'(t)$).

Función derivada

Para calcular la derivada en varios puntos de una función en lugar de obtenerla paso a paso en cada uno de ellos, resulta mucho más cómodo obtener la expresión genérica de la derivada en un punto cualquiera.

En lugar de calcular la derivada de la función $f(x)$ en un punto concreto "a", podíamos obtener la expresión de la derivada de $f(x)$ en un punto genérico "x". Se obtiene así, una nueva función $f'(x)$.

La función f' se llama **función derivada** de f o, simplemente, derivada de f. También se la nombra mediante Df

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo: Hallar la derivada de la función $f(x) = 2x^2 - 3$ ***por definición*** en los puntos $a = 5, a = -1$ y $a = 2$

1º. $f(x+h) = 2.(x+h)^2 - 3 = 2.(x^2 + 2xh + h^2) - 3 = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3$

2º. $f(x+h) - f(x) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3 - (2x^2 - 3) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3 - 2x^2 + 3 = 4xh + 2h^2$

3º. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{4xh+2h^2}{h} = \frac{h.(4x+2h)}{h} = 4x + 2h$

4º. $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 4x + 2h = 4x$

Luego, la derivada de la función $f(x)$ en los puntos pedidos será:

$$f'(5) = 4.5 = 20 \qquad f'(-1) = 4.(-1) = -4 \qquad f'(2) = 4.2 = 8$$

EJERCICIO Nº3: Calcular, por definición, las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = x$ $\quad b)\ f(x) = 5x$ $\quad c)\ f(x) = x^2$ $\quad d)\ f(x) = 7$

$e)\ f(x) = 6x^2$ $\quad f)\ f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g)\ f(x) = x^3$ $\quad h)\ f(x) = x^2$

$i)\ f(x) = \sqrt{x}$ $\quad j)\ f(x) = 8x^2 - 3x + 1$ $\quad k)\ f(x) = \frac{2}{x^2}$ $\quad l)\ f(x) = \sqrt{x+3}$

EJERCICIO Nº4: Calcular, por definición, la derivada de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. Luego hallar la pendiente de la recta tangente en los puntos:

$a)\ a = 0$ $\quad b)\ a = -1$ $\quad c)\ a = 3$ $\quad d)\ a = 5$

Cálculo de derivadas – Reglas de Derivación

Utilizando la definición de derivada, es posible calcular, siempre que exista, la derivada de cualquier función.
El cálculo de derivadas utilizando la definición es un trabajo muy engorroso debido la complejidad de algunas funciones. Es por ello que basta utilizar los resultados ya obtenidos por matemáticos que han realizado ese arduo trabajo.

1º) ***La derivada de una constante es cero***.

$$f(x) = 5 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = -23 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$$

2º) ***La derivada de la variable independiente es uno***.

$$f(x) = x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1$$
$$f(u) = u \quad \rightarrow \quad f'(u) = 1$$

3º) ***La derivada del producto de la variable independiente por una constante, es la constante***.

$$f(x) = 5x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 5$$
$$f(m) = 7m \quad \rightarrow \quad f'(m) = 7$$

4º) ***La derivada de la función potencia, es otra función con exponente disminuido en una unidad y cuyo nuevo coeficiente es el exponente de la función original.***

$$f(x) = x^7 \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 7x^6$$
$$f(x) = x^3 \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 3x^2$$

5º) ***La derivada de una suma de funciones, es la suma de las derivadas de cada función.***

$$f(x) = x^7 + 5x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = 7x^6 + 5$$

6º) ***La derivada de la función seno, es la función coseno***

$$f(x) = sen\ x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \cos x$$

7º) ***La derivada de la función coseno, es menos la función seno***

$$f(x) = cos\ x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = -sen\ x$$

8º) ***La derivada de la función ln, es uno sobre el argumento del logaritmo***

$$f(x) = \ln x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

9º) ***La derivada del producto de dos funciones*** $\boldsymbol{u(x)}$ ***y*** $\boldsymbol{v(x)}$ ***es igual a:***

$$f(x) = u(x).v(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

$$f(x) = \ln x\,.sen\ x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}.sen\ x + \ln x\,.\cos x$$

10º) ***La derivada del cociente de dos funciones*** $\boldsymbol{u(x)}$ ***y*** $\boldsymbol{v(x)}$ ***es igual a:***

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}$$
$$f(x) = \frac{3x^2}{\ln x} \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = \frac{6x.\ln x - 3x^2.\frac{1}{x}}{ln^2 x} = \frac{6x.\ln x - 3x}{ln^2 x}$$

A continuación se muestran más reglas de derivación

$f(x)$	$f'(x)$	Ejemplos
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 7 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	---
$f(x) = a.x$	$f'(x) = a$	$f(x) = 7x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 7$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n.x^{n-1}$	$f(x) = x^7 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 7.x^6$
$f(x) = u(x) + \ v(x)$	$f'(x) = u'(x) + \ v'(x)$	$f(x) = x^7 + sen\ x \ \rightarrow \ f'(x) = 7x^6 + cos\ x$
$f(x) = u(x)\,.v(x)$	$f'(x) = u'(x).v(x) + \ u(x).v'(x)$	$f(x) = x.sen\ x \ \rightarrow f'(x) = \ 1.sen\ x + x.\cos x$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \ \dfrac{u'(x).v(x) - \ u(x).v'(x)}{v^2(x)}$	$f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{2x.\operatorname{sen} x - x^2.\cos x}{sen^2 x}$
$f(x) = \ln u(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{u(x)}$	$f(x) = \ln(8x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{8x}$
$f(x) = sen\ x$	$f'(x) = \cos x$	---
$f(x) = cos\ x$	$f'(x) = -\ sen\ x$	---
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	---
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln a\,.\,a^x$	$f(x) = 3^x \ \rightarrow f'(x) = \ln 3\,.\,3^x$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x).e^{u(x)}$	$f(x) = e^{5x} \ \rightarrow f'(x) = 5.e^{5x}$

EJERCICIO Nº5: Derivar las siguientes funciones aplicando las regla de derivación

$a)\ f(x) = x^4 - x$

$b)\ f(x) = x^2 + \ln x$

$c)\ f(x) = x.cos\ x$

$d)\ f(x) = 3x^4 + 1$

$e)\ f(x) = x^5.e^x$

$f)\ f(x) = \sqrt[3]{x}$

$g)\ f(x) = x^2.\sqrt{x}$

$h)\ f(x) = \frac{x^3+2}{x-1}$

EJERCICIO Nº6: A partir de las reglas de derivación del cociente y de las funciones seno y coseno, hallar las derivadas de:

$a)\ f(x) = tg\ x$ $\quad$ $c)\ f(x) = sec\ x$

$b)\ f(x) = cotg\ x$ $\quad$ $d)\ f(x) = cosec\ x$

EJERCICIO Nº7: Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \frac{3}{\sqrt[5]{x}}$ $\quad$ $d)\ f(x) = (7x^3 + 4x).(x^2 - x)$

$b)\ f(x) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x + x^2 - \frac{1}{2}x^4$ $\quad$ $e)\ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2} - \frac{2x}{t^2}$

$c)\ f(x) = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{2t}{x^2} + \frac{1}{3t}$

Derivada de una función compuesta. Regla de la cadena

Vamos a jugar con estas funciones: $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = x^2 + 5x - 1$. Si componemos las funciones resulta otra función $h(x) = f \circ g(x) = f[g(x)] = sen\ (x^2 + 5x - 1)$

¿Cómo podemos derivar la función compuesta $h(x)$?

Las derivadas de las funciones f y g ya son conocidas, entonces a partir de ellas podremos definir la derivada de una función compuesta también llamada regla de la cadena.

$h(x) = f[g(x)]$	$h'(x) = f'[g(x)]\,.\,g'(x)$

En nuestro ejemplo: $h(x) = sen\ (x^2 + 5x - 1)$ $\rightarrow$ $h'(x) = cos\ (x^2 + 5x - 1)\,.\,(2x + 5)$

EJERCICIO Nº8: Calcular las derivadas de las siguientes funciones aplicando regla de la cadena:

$a)\ f(x) = cos\ \sqrt{x}$ $\quad$ $e)\ f(x) = ln\ \left(7x^4 + \frac{9}{x}\right)$

$b)\ f(x) = \sqrt[5]{tg\ x}$ $\quad$ $f)\ f(x) = cos^{\,8}(x^3 + 3^x)$

$c)\ f(x) = \sqrt[3]{5x^2 + 2x}$ $\quad$ $g)\ f(x) = \sqrt[5]{\frac{x}{1+x^4}} + \pi^2$

$d)\ f(x) = sen\ (4x^3 + 9x^2)$

EJERCICIO Nº9: Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ y = \ln(2x-1)$

$b)\ y = \ln(x^2-1)$

$c)\ y = \ln\sqrt{1-x}$

$d)\ y = e^{4x}$

$e)\ y = tg^2 x$

$f)\ \ y = 5\,tg^3(3x^2+1)$

$g)\ y = 5\,e^{(x^2+3x)}$

$h)\ y = x^3 . e^x$

$i)\ y = sen\,x\,.\cos 2x$

$j)\ y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$

EJERCICIO Nº10: Indicar el error en el cálculo de las siguientes derivadas y escribir la respuesta correcta:

$a)\ y = sen^4(\sqrt{x}) \quad \rightarrow \quad y' = 4sen^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$b)\ y = \sqrt[3]{x}\ +\ \pi^x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} + \pi^x.\ln\pi$

Derivadas Sucesivas

Si la función f', derivada de f , es a su vez derivable, su función derivada se llama **derivada segunda**; se designa por f'' y se lee f segunda

$$[f'(x)]' = f''(x)$$

Análogamente se definirían la derivada tercera, f''', cuarta, f^{IV} y sucesivas.

Ejemplo: Obtener las derivadas sucesivas de $f(x) = x^3+5x^2-8x+1$

$f(x) = x^3+5x^2-8x+1$
$f'(x) = 3x^2+10x-8$
$f''(x) = 6x+10$
$f'''(x) = 6$
$f^{IV}(x) = 0$

A partir de las derivadas de orden 4, son todas las derivadas sucesivas iguales a cero.

EJERCICIO Nº11: Calcular las derivadas sucesivas de f en cada uno de los siguientes casos:

$a)\ f(x) = 3x^3$
$b) f(x) = x^4+2x^2-1$
$c)\ f(x) = (x+3)^3$
$d)\ f(x) = x^5+4x$
$e)\ f(x) = (2x^3-1)^2$

EJERCICIO Nº 12: Hallar la derivada cuarta de la función $f(x) = x^8 - 7^x + 1$

Respuestas

EJERCICIO Nº 1 $a)\ f'(-1)=\frac{\sqrt{2}}{4}$ $b)\ f'(3)=-4$ $c)\ f'(1)=3$ $d)\ f'(0)=-\frac{1}{4}$

EJERCICIO Nº2 $a)\ G(3)-G(2)=5000$ $b)\ \frac{G(2{,}5)-G(2)}{2{,}5-2}=4500$ $c)\ G'(2)=4000$

EJERCICIO Nº3 $a)\ f'(x)=1$ $b)\ f'(x)=5$ $c)\ f'(x)=2x$ $d)\ f'(x)=0$

$e)\ f'(x)=12x$ $f)\ f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ $g)\ f'(x)=3x^2$ $h)\ f'(x)=2x$

$i)\ f'(x)=-\frac{\sqrt{x}}{x}$ $j)\ f'(x)=16x-3$ $k)\ f'(x)=-\frac{4}{x^3}$ $l)\ f'(x)=-\frac{\sqrt{x+3}}{x+3}$

EJERCICIO Nº4 $a)\ f'(0)=5$ $b)\ f'(-1)=12$ $c)\ f'(3)=20$ $d)\ f'(5)=60$

EJERCICIO Nº5 $a)\ f'(x)=4x^3-1$ $b)\ f'(x)=\frac{2x^2+1}{x}$ $c)\ f'(x)=cos\,x-x.sen\,x$

$d)\ f'(x)=12x^3$ $e)\ f'(x)=5x^4.e^x+x^5.e^x$ $f)\ f'(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$

$g)\ f'(x)=\frac{5}{2}x.\sqrt{x}$ $h)\ f'(x)=\frac{2x^3-3x^2-2}{(x-1)^2}$

EJERCICIO Nº6 $a)\ f'(x)=sec^2x$ $b)\ f'(x)=-cosec^2x$

$c)\ f'(x)=sec\,x\ .\ tg\,x$ $d)\ f'(x)=-cosec\,x\,.cotg\,x$

EJERCICIO Nº7 $a)\ f'(x)=-\frac{3.\sqrt[5]{x^4}}{5x^2}$ $b)\ f'(x)=-\frac{3}{4}+2x-2x^3$ $c)\ f'(x)=-\frac{2.\sqrt[4]{x^3}}{x^2}+\frac{4t}{x^3}$

$d)\ f'(x)=35x^4-28x^3+12x^2-8x$ $e)\ f'(x)=\frac{x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^2}-\frac{2}{t^2}$

EJERCICIO Nº8 $a)\ f'(x)=\frac{-\sqrt{x}\ .\ sen\,\sqrt{x}}{2x}$ $b)\ f'(x)=\frac{1}{5}.(tg\,x)^{-\frac{4}{5}}\ .\ sec^2x$ $c)\ f'(x)=\frac{10x+2}{3\,.\sqrt[3]{25x^4+20x^3+4x^2}}$

$d)\ f'(x)=(12x^2+18x)\,.\cos(4x^3+9x^2)$ $e)\ f'(x)=\frac{28x^5-9}{7x^6+9x}$

$f)\ f'(x)=-8.(3x^2+\ln 3\ .\ 3^x)\ .\ cos^{\,7}(x^3+3^x)\,.sen\,(x^3+3^x)$ $g)\ f'(x)=\frac{1-3x^4}{5.(1+x^4)^2}\cdot\left(\frac{x}{1+x^4}\right)^{-\frac{4}{5}}$

EJERCICIO Nº9 $a)\ f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ $b)\ f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ $c)\ f'(x)=\frac{-1}{2.(1-x)}$ $d)\ f'(x)=4.e^{4x}$

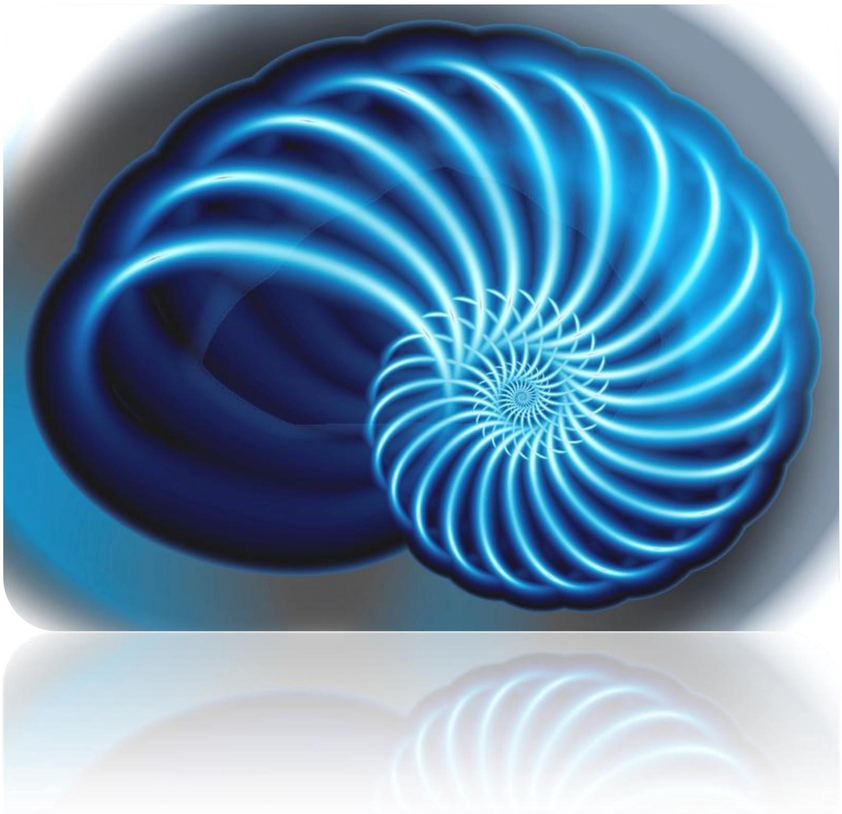
$e)\ f'(x)=2.tg\,x\ .\ sec^2x$ $f)\ f'(x)=90x\ .\ tg^2(3x^2+1)\ .\ sec^2(3x^2+1)$

$g)\ f'(x)=5.(2x+3)\,.e^{(x^2+3x)}$ $h)\ f'(x)=e^x.(3x^2+x^3)$

$i)\ f'(x)=\cos x\ .\cos 2x-2\,sen\,x\,.sen\,2x$ $j)\ f'(x)=-4.\ \frac{1-x}{(1+x)^3}$

EJERCICIO Nº12 $f^{IV}(x)=1680x^4-ln^4\,7\ .\ 7^x$

UNIDAD Nº 4



APLICACIÓN DE LA DERIVADA

Los problemas típicos que dieron origen al cálculo infinitesimal, comenzaron a plantearse en la época clásica de la antigua Grecia (siglo III a.c), con conceptos de tipo geométrico como el problema de la tangente a una curva de Apolonio de Perge, pero no se encontraron métodos sistemáticos de resolución hasta el siglo XVII por la obra de Isaac Newton y Gottfried Leibniz.

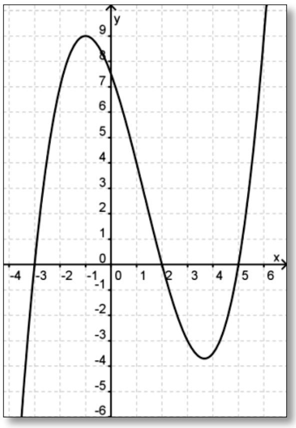
Ellos sintetizaron dos conceptos y métodos usados por sus predecesores en lo que hoy llamamos «diferenciación» e «integración». Desarrollaron reglas para manipular las derivadas (reglas de derivación) y mostraron que ambos conceptos eran inversos (teorema fundamental del cálculo).

ESTUDIO DE FUNCIONES SENCILLAS

Crecimiento y decrecimiento

Una función ***crece en un intervalo***, si y solo si la derivada de la función es positiva en todos los puntos del intervalo. Esto se debe a que las rectas tangentes a la función trazadas en cada uno de esos puntos tienen pendiente positiva.

Una función ***decrece en un intervalo***, si y solo si la derivada de la función es negativa en todos los puntos del intervalo. Esto se debe a que las rectas tangentes a la función trazadas en cada uno de esos puntos tienen pendiente negativa.



Si la función alcanza un máximo o mínimo local en un punto de su dominio, la derivada de la función en ese punto es nula o no existe. Debemos recordar que si la pendiente de una recta es cero, la recta es paralela al eje de abscisas.

$Si\ f'(x) > 0\ en\ (a;b)\ \Rightarrow la\ función\ f\ es\ creciente\ en\ (a;b)$
$Si\ f'(x) < 0\ en\ (a;b)\ \Rightarrow la\ función\ f\ es\ decreciente\ en\ (a;b)$
$Si\ f'(c) = 0\ \ \Rightarrow la\ función\ f\ tiene\ un\ punto\ crítico\ en\ x = c.$

Para analizar el crecimiento o decrecimiento de una función continua, procedemos como en el siguiente ejemplo:

En la función $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{15}{2}$

1. Hallamos $f'(x)$ $\quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x - \frac{11}{4}$

2. Resolvernos $f'(x) = 0$ para hallar los **puntos críticos.** $\frac{3}{4}x^2 - 2x - \frac{11}{4} = 0$

   Aplicamos resolvente y obtenemos

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = \frac{11}{3}$$

3. Dividimos a los números reales en intervalos tomando como punto de separación los puntos críticos.

$$(-\infty;-1) \qquad \left(-1;\frac{11}{3}\right) \qquad \left(\frac{11}{3};+\infty\right)$$

4. Calculamos $f'(x)$ en un punto cualquiera de cada intervalo y a partir del signo de la derivada determinamos si la función crece o decrece.

Intervalo	*Punto elegido*	$\boldsymbol{f'(a)}$	
$(-\infty;-1)$	$x = -2$	$f'(-2) = \frac{17}{4} > 0$	**Crece**
$\left(-1;\frac{11}{3}\right)$	$x = 0$	$f'(0) = -\frac{11}{4} < 0$	**Decrece**
$\left(\frac{11}{3};+\infty\right)$	$x = 4$	$f'(4) = \frac{5}{4} > 0$	**Crece**

EJERCICIO Nº 1: Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

$b)\ f(x) = x^2 - 12x + 8$

$c)\ f(x) = x^2 + 10x$

$d)\ f(x) = x^4 + 4x + 8$

$e)\ f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$

$f)\ f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 40$

EJERCICIO Nº2: Analizar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones

$a)\ f(x) = (x+5)^3$ $\quad b)\ f(x) = x^2.(1+x)$ $\quad c)\ f(x) = (x+2).(x^2+7x+1)$

Máximos y mínimos

Como hemos dicho anteriormente, existe una ***condición necesaria (CN)*** para la existencia de un extremo local. Esa condición necesaria es que la primera derivada de la función sea cero. Esto se debe a que la pendiente de la recta tangente debe ser cero en los extremos.

Cuando igualamos a la función derivada a cero nos queda una ecuación para resolver. Los valores hallados son llamados ***Puntos Críticos (PC)***, ya que en estos valores puede existir un ***posible*** máximo o mínimo local.

Estudio del signo de la derivada segunda: hallamos la derivada segunda de la función. Luego calculamos cual es el valor de la derivada segunda en los puntos críticos. Si resulta un valor negativo, allí existirá un máximo local. Si resulta positivo, allí existirá un mínimo local.

Volviendo a nuestro ejemplo:

Si usáramos el criterio de la segunda derivada: $f''(x) = \frac{3}{2}x - 2$

Evaluando en los puntos críticos: $f''(-1) = \frac{3}{2}(-1) - 2 < 0 \quad \rightarrow \quad en\ \ x = -1\ \ Máximo\ Local$

$$f''\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{11}{3}\right) - 2 > 0 \quad \rightarrow \quad en\ \ x = \frac{11}{3} \quad Mínimo\ Local$$

Debemos recordar que, ***el máximo o mínimo de la función es un punto y por lo tanto debe estar expresado como tal.***

Para obtener el valor de ordenada del extremo, se reemplaza en la función original.

$f(-1) = \frac{1}{4}.(-1)^3 - (-1)^2 - \frac{11}{4}.(-1) + \frac{15}{2} = 9$

$f\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{1}{4}.\left(\frac{11}{3}\right)^3 - \left(\frac{11}{3}\right)^2 - \frac{11}{4}.\left(\frac{11}{3}\right) + \frac{15}{2} = -\ \frac{100}{27}$

Finalmente: la función tiene $\boldsymbol{Máximo = (-1; 9)}$ $\qquad \boldsymbol{Mínimo = \left(\frac{11}{3}; -\frac{100}{27}\right)}$

EJERCICIO Nº3: Determinar máximos y mínimos de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = -x^2 + 6x - 1$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x$

$c)\ f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$ $\qquad$ $a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$

Puntos de inflexión. Concavidad

- ✓ *Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo, cuando su gráfica está por encima de la recta tangente a la función en todos los puntos de dicho intervalo.*

- ✓ *Una función es cóncava hacia abajo en un intervalo, cuando su grafica está por debajo de la recta tangente a la función en todos los puntos de dicho intervalo.*

- ✓ *Una función tiene un punto de inflexión en $x = x_0$ cuando la recta tangente a la función en ese punto (si es que existe) atraviesa la gráfica. En el punto de inflexión, la curva cambia su concavidad.*

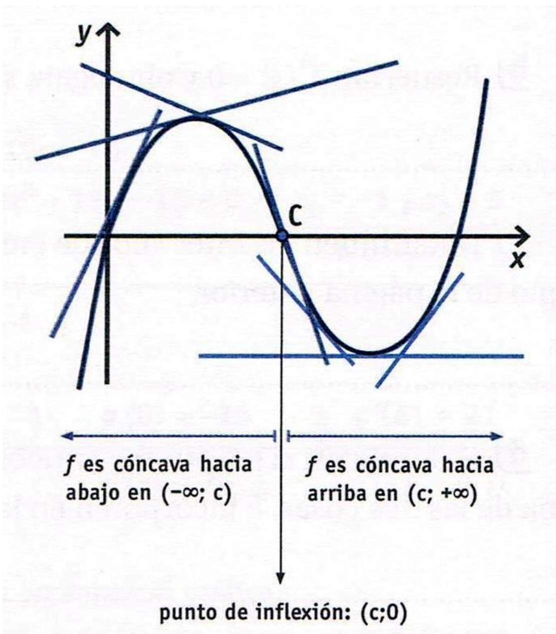
Para analizar la concavidad de una curva continua debemos considerar el signo de la derivada segunda $f''(x)$

$Si\ f''(x) > 0 \ \rightarrow \ la\ curva\ es\ cóncavva\ hacia\ arriba$

$Si\ f''(x) < 0 \ \rightarrow \ la\ curva\ es\ cóncavva\ hacia\ abajo$

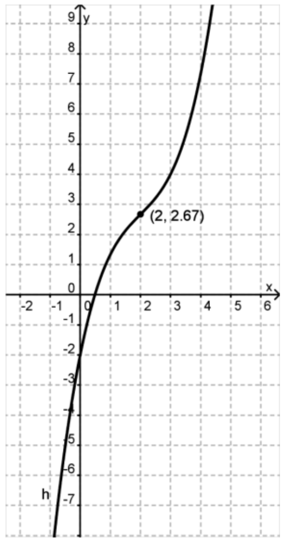
$Si\ f''(x) = 0 \ \rightarrow \ hay\ un\ posible\ punto\ de\ inflexión\ PI$

Si la derivada tercera de la función, en el posible punto de inflexión es cero, entonces No existe punto de Inflexión.



Ejemplo:

Para analizar la concavidad de la función $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$ procedemos de la siguiente manera:



- Hallamos la función derivada segunda y buscamos los posibles Puntos de Inflexión.

  $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$
  $h'(x) = x^2 - 4x + 5$
  $h''(x) = 2x - 4$
  $h''(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 4 = 0 \qquad \rightarrow x = 2$

- Construimos intervalos en forma similar a lo realizado en el estudio del crecimiento y decrecimiento de la función, pero con la derivada segunda.

Intervalo	*Punto elegido*	$h''(a)$	
$(-\infty; 2)$	$x = 1$	$h''(1) = -2 < 0$	**Cóncava hacia abajo** $\cap$
$(2; +\infty)$	$x = 3$	$h''(3) = 2 > 0$	**Cóncava hacia arriba** $\cup$

Entonces $h(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty; 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2; +\infty)$

Veamos si en x=2 existe punto de inflexión.

$h''(x) = 2x - 4$
$h'''(x) = 2$
$h'''(2) = 2 \neq 0$

como la derivada tercera en el punto no es cero, existe un punto de inflexión en $\boldsymbol{PI}: (\mathbf{2}; \boldsymbol{f}(\mathbf{2})) = \left(\mathbf{2}; \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{2}}\right)$

EJERCICIO Nº4: Determinar los intervalos de concavidad de las siguientes curvas y hallar sus puntos de inflexión.

$a)\ f(x) = \frac{x^3}{2} + 2 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3 \qquad c)\ f(x) = -x^3 + 4x^2$

EJERCICIO Nº5: Determinar los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = -x^2 + 6x - 1 \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x$

$c)\ f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 \qquad a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$

EJERCICIO Nº6: Analizar la concavidad de las siguientes funciones

$a)\ f(x) = (x + 5)^3 \qquad b)\ f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 \qquad c)\ f(x) = (x + 2).(x^2 + 7x + 1)$

Estudio completo de una función

Con todo lo visto anteriormente podemos realizar el estudio completo de una función.
Los pasos a seguir entonces serán:

1º. Hallar los Puntos críticos de la función $(f'(x) = 0)$ y armar intervalos y estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.

2º. Encontrar los Máximos y Mínimos de la función, si los tuviese.

3º. Hallar los posibles puntos de inflexión $(f''(x) = 0)$

4º. Armar intervalos y estudiar la concavidad de la función.

5º. Graficar la función.

<u>Ejemplo</u>: Realizar el estudio completo de la función $h(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 5$

1º. INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

$$\left.\begin{array}{r} h'(x) = -3x^2 + 6x^2 + 9 \\ -3x^2 + 6x^2 + 9 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} \boldsymbol{x_1 = -1} \\ \boldsymbol{x_2 = 3} \end{array}$$

Puntos Críticos

Intervalo	*Punto elegido*	$h'(a)$	
$(-\infty; -1)$	$x = -2$	$h'(-2) = -15 < 0$	**Decrece**
$(-1; 3)$	$x = 0$	$h'(0) = 9 > 0$	**Crece**
$(3; +\infty)$	$x = 4$	$h'(4) = -15 < 0$	**Decrece**

2º. EXTREMOS

$h''(x) = -6x + 6$
$h''(-1) = -6.(-1) + 6 = 12 > 0 \quad \rightarrow \textit{Mínimo en } x = -1$
$h''(3) = -6.(3) + 6 = -12 < 0 \quad \rightarrow \textit{Máximo en } x = 3$

Debemos calcular la ordenada de cada punto
$h(-1) = -(-1)^3 + 3.(-1)^2 + 9.(-1) - 5 = -10 \qquad \textit{Mín}: (-1; -10)$
$h(3) = -(3)^3 + 3.(3)^2 + 9.(3) - 5 = 22 \qquad \textit{Máx}: (3; 22)$

3º. PUNTOS DE INFLEXION

$$\left.\begin{array}{r} h''(x) = -6x + 6 \\ -6x + 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 1}$$

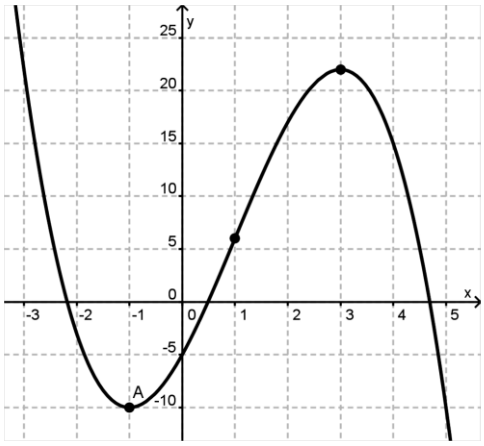
Posible Punto de Inflexión

$$\left.\begin{array}{r} h''(x) = -6x + 6 \\ h'''(x) = -6 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} h'''(1) = -6 \neq 0 \\ \boldsymbol{PI = (1; 6)} \end{array}$$

4º. INTERVALOS DE CONCAVIDAD

Intervalo	*Punto elegido*	$h''(a)$	
$(-\infty; 1)$	$x = 0$	$h''(0) = 6 > 0$	**Cóncava hacia arriba** ∪
$(1; +\infty)$	$x = 2$	$h''(2) = -6 < 0$	**Cóncava hacia abajo** ∩

5º. GRÁFICO



EJERCICIO Nº7: Realizar el estudio completo de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

$b)\ f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$

$c)\ f(x) = x^4 - 32x + 2$

$d)\ f(x) = 4x^4 - 2x^2 - 5$

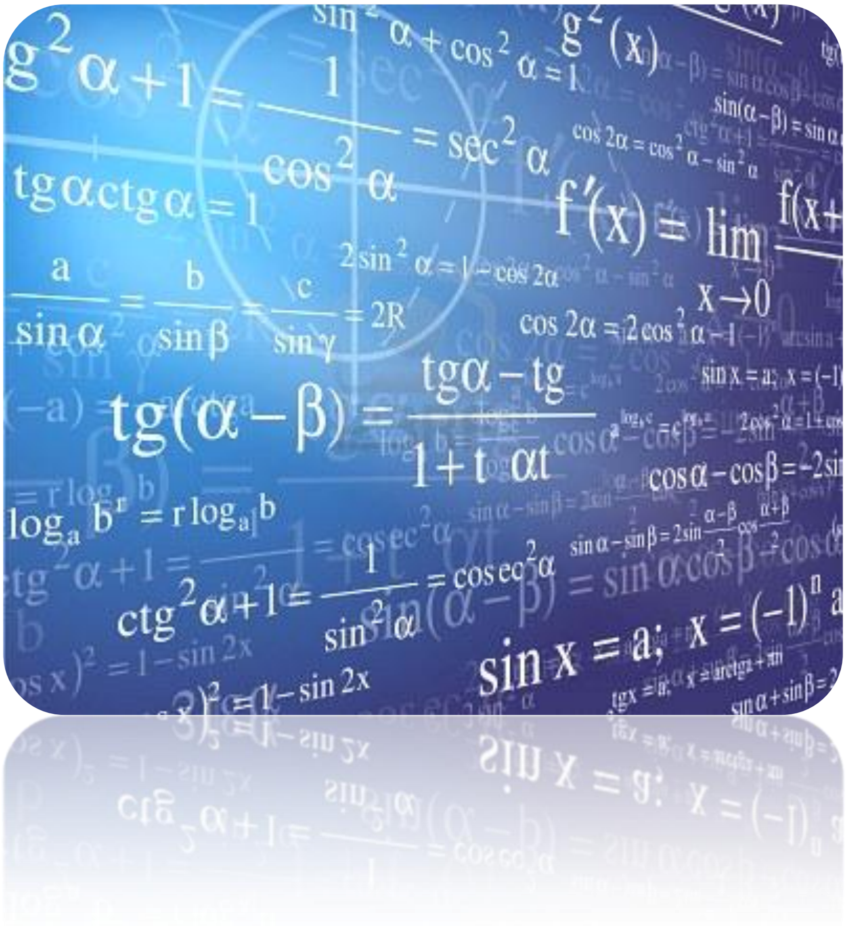
$e)\ f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 3$

$f)\ f(x) = -x^4 - 8x^2 - 2$

$g)\ f(x) = x^4 - 3x^3$

$h)\ f(x) = -x^4 + 32x$

UNIDAD Nº 5



La trigonometría estudia las relaciones que existen entre los lados de un triángulo y sus ángulos.

Estás pueden extenderse a cualquier ángulo aunque no forme parte de un triángulo. A partir de ellas, se definen las funciones trigonométricas.

Las características de este tipo de funciones las convierte en un buen modelo para la descripción de fenómenos físicos que se propagan a través de ondas, como la luz y el sonido.

TRIGONOMETRÍA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

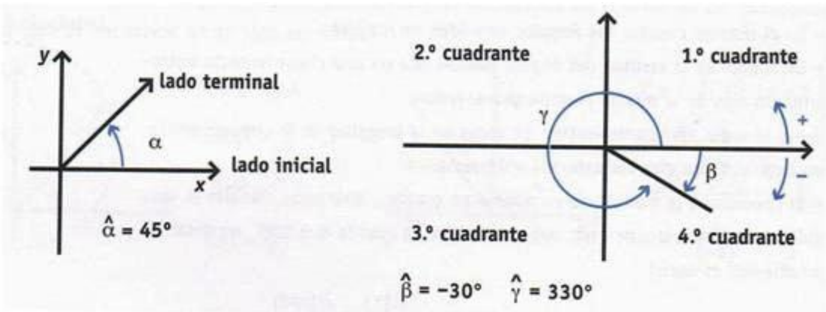
Ángulos Orientados en un Sistema Cartesiano

En general, un ángulo en un sistema de ejes de coordenadas cartesianas tiene las siguientes características:

- su vértice está en el origen de coordenadas;
- está generado por la rotación de una semirrecta con origen en $(0\ ;\ 0)$;
- la semirrecta parte de una posición inicial, que coincide con el semieje positivo de ***x*** (lado inicial del ángulo) y gira, manteniendo fijo su origen, hasta llegar a una posición final (lado terminal).

En la siguiente figura, se muestra cómo los ejes cartesianos dividen el plano en cuatro sectores, llamados cuadrantes. Se dice que un ángulo pertenece a un cuadrante dado si en él está ubicado el lado terminal:

Es fundamental distinguir el sentido en que rota la semirrecta; cuando lo hace en sentido contrario al que avanzan las agujas del reloj (antihorario), genera un ángulo positivo; y cuando lo hace en el mismo sentido (horario), genera un ángulo negativo.



Sistemas de medición

Aunque en la vida cotidiana es usual medir los ángulos en grados sexagesimales, para estudiar funciones trigonométricas es conveniente utilizar un sistema llamado **sistema circular.**
Este sistema se construye a partir de la proporcionalidad entre arcos y radios.

- **Sistema Sexagesimal**

En este sistema se toma como unidad de medida el ángulo que se obtiene dividiendo un ángulo recto en 90 partes iguales. Su medida es el grado sexagesimal: un ángulo recto medirá 90 grados.
Cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos. Los símbolos para estas unidades son:

grado ° minuto ' segundo ''

- **Sistema Circular**

En este sistema se usa como unidad de medida el "**radián**". Un radián equivale aproximadamente a 57° 17´ 45´´
Un ángulo en radianes se define como el cociente entre la longitud del arco que abarca y el radio de la circunferencia. Para encontrar una equivalencia con el sistema sexagesimal podemos razonarlo siguiente:
El perímetro de cualquier circunferencia vale $2\pi r$, es decir, abarca un ángulo de $2\pi\ radianes \left(\frac{2\pi r}{r} = 2\pi\right)$.
Paralelamente, un ángulo de giro completo mide 360°, con lo que se concluye que $2\pi\ equivale\ 360°$.

Conversión entre grados sexagesimales y radianes

Para pasar de grados a radianes y viceversa, se utiliza una regla de tres simple a partir de la relación vista que un giro completo de 360° en el sistema sexagesimal equivale a 2π radianes.

Ejemplos:

Expresar en el sistema circular $\hat{\alpha} = 30º$.

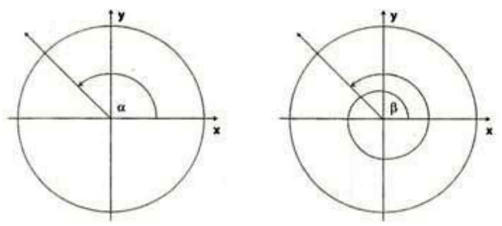
$$360^\circ \text{ ——————— } 2\pi$$
$$30^\circ \text{ ——————— } x = \frac{30^\circ . 2\pi}{360^\circ} = \frac{1}{3}\pi$$

Expresar en el sistema sexagesimal $\hat{\beta} = \frac{3}{4}\pi$

$$2\pi \text{ ——————— } 360^\circ$$
$$\frac{3}{4}\pi \text{ ——————— } x = \frac{\frac{3}{4}\pi . 360^\circ}{2\pi} = 135^\circ$$

Relaciones de congruencia

En la figura observamos dos ángulos que poseen igual lado inicial y terminal. Estos dos ángulos, si bien tienen el mismo lado terminal, son distintos por estar generados por dos rotaciones distintas. Se dice que ***pertenecen a la misma clase***. Los ángulos congruentes son los que tienen los mismos lados inicial y terminal. Los ángulos congruentes difieren en un número entero de giros completos.



C_β: *contiene todos los ángulos congruentes con* $\hat{\beta}$ *con* $0^\circ \leq \beta < 360^\circ$

Ejemplos:

$a)$ $C_{30} = \{30^o + k.360^o\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$ contiene los infinitos ángulos congruentes a 30º.

Dándole cualquier valor entero a "k" obtenemos ángulos pertenecientes a la misma clase

$\beta = 30^o + (-3)\,.360^o = -1050^o$

$\beta = 30^o + 8\,.360^o = 2910^o$

b) Verificar si los ángulos 1525º y 120º son congruentes.

Dos ángulos son congruentes si su diferencia es un múltiplo entero de 2π (360º en el sistema sexagesimal)

$$1525^\circ - 120^\circ \overset{?}{=} n.360^\circ$$
$$\frac{1525^\circ - 120^\circ}{360^\circ} = n$$
$$n \cong 3{,}9 \notin \mathbb{Z} \therefore no\ son\ congruentes$$

EJERCICIO Nº1: Calcular, en grados sexagesimales, el valor aproximado de cada uno de los siguientes ángulos.

$a)\ \hat{\propto} = \frac{2}{3}\pi$ $\quad b)\ \hat{\beta} = \frac{7}{4}\pi$ $\quad c)\ \hat{\theta} = \frac{7}{6}\pi$ $\quad d)\ \hat{\gamma} = \frac{8}{5}\pi$ $\quad e)\ \hat{\mu} = \frac{2}{9}\pi$

$f)\ \hat{\delta} = 4{,}36\ rad$ $\quad g)\ \hat{\rho} = 0{,}85\ rad$ $\quad h)\ \hat{\varphi} = 1{,}57\ rad$ $\quad i)\ \hat{\omega} = 1\ rad$ $\quad j)\ \hat{\varepsilon} = 3{,}925\ rad$

EJERCICIO Nº2: Expresar los siguientes ángulos en radianes, dando las respuestas en función de π cuando sea posible.

a) $\hat{\propto} = 315°$ $\quad$ *b)* $\hat{\beta} = 210°$ $\quad$ *c)* $\hat{\theta} = 155°$ $\quad$ *d)* $\hat{\gamma} = 340°$ $\quad$ *e)* $\hat{\mu} = 15°$

f) $\hat{\delta} = 20°15'20''$ $\quad$ *g)* $\hat{\rho} = 190°35'42''$ $\quad$ *h)* $\hat{\varphi} = 238°25'38''$ $\quad$ *i)* $\hat{\omega} = 310°10''$

EJERCICIO Nº3: Indicar a que clase pertenecen los siguientes ángulos del sistema sexagesimal:

a) $\hat{\propto} = 1536°$ $\quad \hat{\beta} = 3005°$ $\quad \hat{\theta} = -1024°$ $\quad \hat{\gamma} = 2013°$

EJERCICIO Nº4: Indicar a que clase pertenecen los siguientes ángulos del sistema circular:

$a)\ \hat{\propto} = \frac{89}{6}\pi$ $\quad b)\ \hat{\beta} = \frac{51}{4}\pi$ $\quad c)\ \hat{\theta} = \frac{91}{5}\pi$ $\quad d)\ \hat{\gamma} = \frac{74}{3}\pi$

EJERCICIO Nº5: Calificar de verdadera o falsa cada una de las siguientes proposiciones y justificar:

$a)\ 1560° \in C_{120°}$ ………… $\quad d)\ -720° \in C_{180°}$ …………

$b)\ -2610° \notin C_{270°}$ ………… $\quad e)\ 48°15' \in C_{48°15'}$ …………

$c)\ 440° \in C_{260°}$ ………… $\quad f)\ -1309°55' \notin C_{130°15'}$ …………

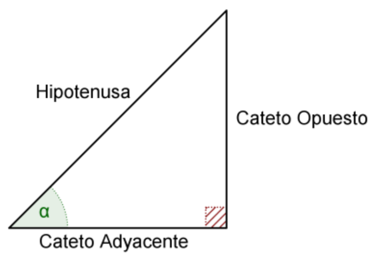
Razones Trigonométricas

Las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, establecen una relación entre los lados del triángulo y uno de sus ángulos agudos. Las razones trigonométricas básicas son:

Seno: $\quad sen\ \hat{\alpha} = \frac{Cat.\ Opuesto}{Hipotenusa}$

Coseno: $\quad cos\ \hat{\alpha} = \frac{Cat.\ Adyacente}{Hipotenusa}$

Tangente: $\quad tg\ \hat{\alpha} = \frac{Cat.\ Opuesto}{Cat.Adyacente}$



También existen otras razones, que son los inversos multiplicativos de las anteriores: cosecante, secante y cotangente de un ángulo (para todos los casos en los que el denominador no se anule).

$$cosec\ \hat{\alpha} = \frac{Hipotenusa}{Cat.\ Opuesto} \qquad sec\ \hat{\alpha} = \frac{Hipotenusa}{Cat.\ Adyacente} \qquad cotg\ \hat{\alpha} = \frac{Cat.Adyacente}{Cat.\ Opuesto}$$

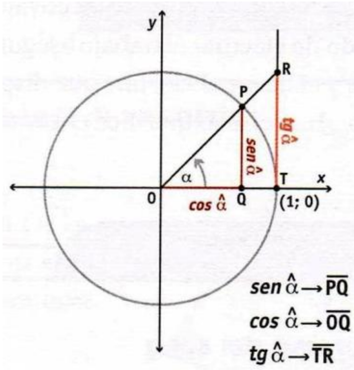
Se cumplen las siguientes relaciones:

$$cosec\ \hat{\alpha} = \frac{1}{sen\ \hat{\alpha}} \qquad sec\ \hat{\alpha} = \frac{1}{cos\ \hat{\alpha}} \qquad cotg\ \hat{\alpha} = \frac{1}{tg\ \hat{\alpha}} = \frac{cos\ \hat{\alpha}}{sen\ \hat{\alpha}} \qquad tg\ \hat{\alpha} = \frac{sen\ \hat{\alpha}}{\cos\hat{\alpha}}$$

La Circunferencia Trigonométrica

La circunferencia trigonométrica es una herramienta que nos permite representar las razones trigonométricas de cualquier ángulo.

Dicha circunferencia posee radio= 1 y su centro es el origen de coordenadas. Al considerar el radio de una unidad, las expresiones en las que aparece éste se simplifican.



$$sen\ \hat{\alpha} = \frac{Cat.Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ} \qquad cos\ \hat{\alpha} = \frac{Cat.Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ}$$

$$tg\ \hat{\alpha} = \frac{Cat.Opuesto}{Cat.Adyacente} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{sen\ \hat{\alpha}}{cos\ \hat{\alpha}}$$

La circunferencia trigonométrica permite ver una "representación geométrica" del seno, el coseno y la tangente de un ángulo, mediante "segmentos asociados".

- ***El seno de un ángulo está asociado a segmentos verticales; cuando están por encima del eje x, son positivos, y cuando están por debajo, son negativos.***

- ***El coseno de un ángulo está asociado a segmentos horizontales: cuando están hacia la derecha del eje y es positivo, y cuando están a la izquierda, es negativo.***

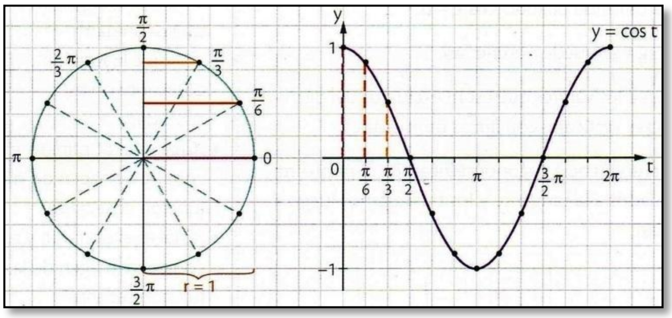
Funciones Trigonométricas

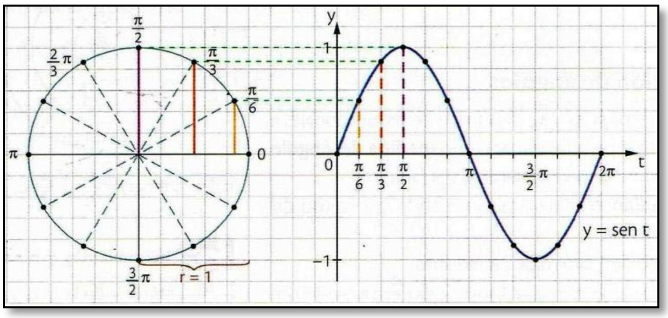
Consideremos las siguientes funciones: $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \cos\ x$

Para construir los gráficos de estas funciones, trasladamos el valor de los segmentos asociados.

Como x puede tomar cualquier valor real, estas funciones tienen como dominio el conjunto $\mathbb{R}$.

Si estudiamos estas funciones dentro de un giro completo en la circunferencia trigonométrica,$[0; 2\pi)$, obtenemos los siguientes gráficos.





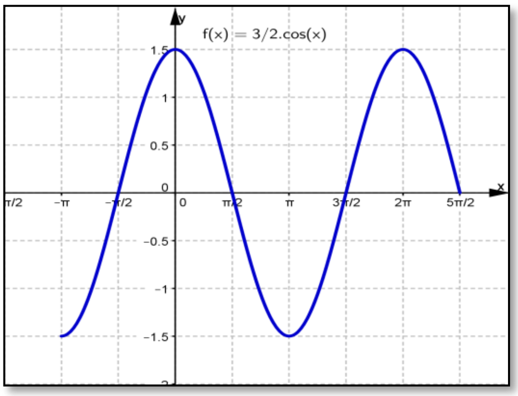
En ambos casos podemos observar que las funciones varían entre -1 y 1. O sea, el conjunto imagen es $[-1; 1]$.

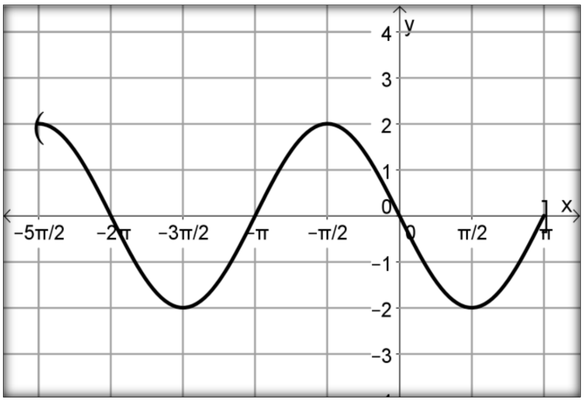
Dado que dos ángulos que difieren en un número de giros son equivalentes, entonces se cumple que: $sen\ \alpha = sen\ (\alpha + 2k\pi)$donde $k \in \mathbb{Z}$ (k representa el número de giros). Lo mismo ocurre con la función $\cos\ x$.

Las funciones que verifican esto, se dice que son ***periódicas***.

EJERCICIO Nº6: Copiar y completar el siguiente cuadro para cada una de las funciones trigonométricas mostradas a continuación:

$Interv.$	$Dom\ f(x)$	$Im\ f(x)$	C_0	C_+	C_-



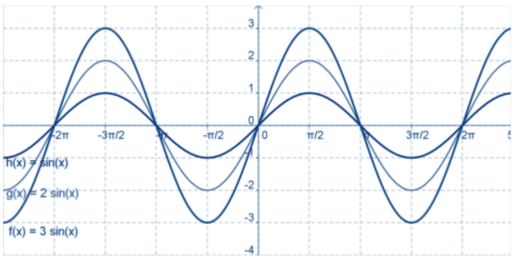


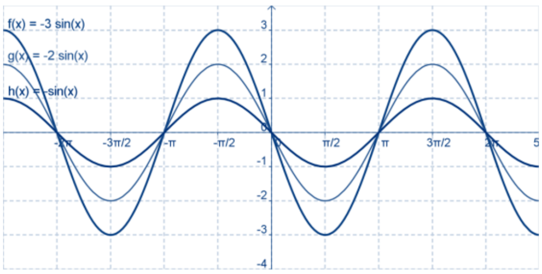
Transformaciones de gráficas de funciones trigonométricas

Las reglas para desplazar, dilatar, contraer, reflejar la gráfica de una función se pueden aplicar a las funciones trigonométricas, recordadas en el siguiente diagrama:

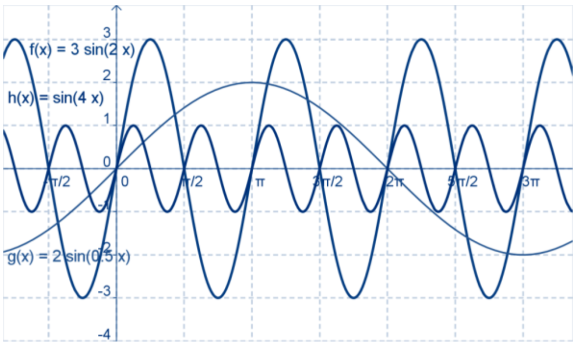
$$f(x) = A.f(bx + c)$$

A: *Amplitud de la función*. Es el promedio entre el valor máximo y mínimo de la función. Si A es un valor positivo y mayor que 1, la función sufre una ampliación vertical. Si A es un valor menor a -1, la función sufre una reflexión respecto al eje x. Si A toma valores entre 0 y 1, la gráfica sufre una reducción.





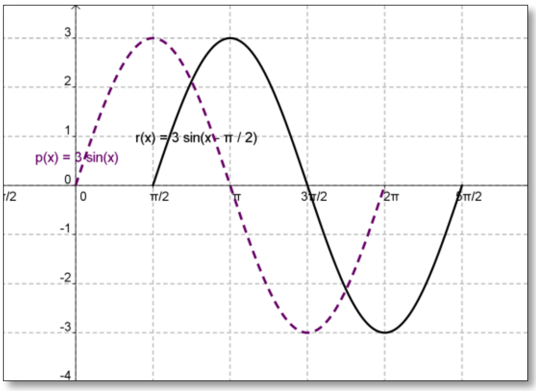
b: *Pulsación de la función o velocidad angular*. Reduce o amplia el período de la función.



Como se observa en el gráfico, cuanto mayor sea el valor de b, mas rápido es el período; recorre un ciclo en menos tiempo. En caso contrario, si 0<b<1 la onda será más amplia, tardara mas en completar un ciclo. Así se obtiene que

$$b = \frac{2\pi}{T} \quad \text{o bien} \quad T = \frac{2\pi}{b}$$

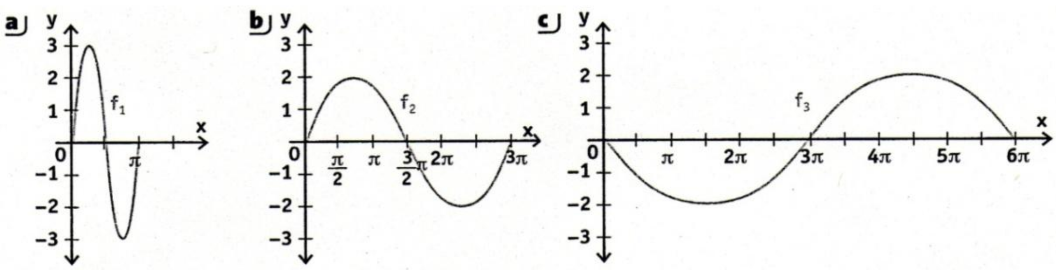
<u>Ángulo de fase o de desplazamiento horizontal</u>. Es el ángulo que desplaza a la función $f(x) = A.f(bx)$hacia la derecha o izquierda $-\frac{c}{b}$ unidades.

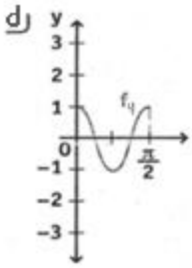


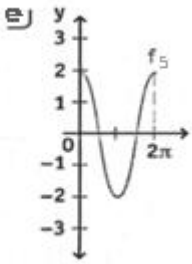
EJERCICIO Nº7: Dadas las siguientes funciones trigonométricas, completar la siguiente tabla, graficar aproximadamente y analizar.

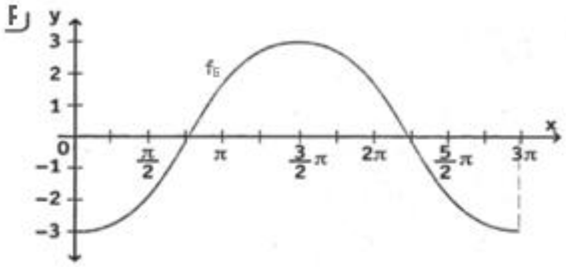
	Amplitud (A)	***Pulsación (b)***	***Período (T)***	***Ángulo de fase***
$y = -2\ sen\ x$				
$y = 5\ sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$				
$y = -sen\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\pi\right)$				
$y = \frac{5}{2}\ cos\ x$				
$y = -2cos\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{12}\right)$				
$y = 4\ cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$				

EJERCICIO Nº8 Las siguientes figuras muestran la gráfica de funciones del tipo$f(x) = A\ sen\ (bx)$ y $f(x) = A\ cos\ (bx)$ en intervalos $[0\ ; T)$. Analizarlos y completar el cuadro.



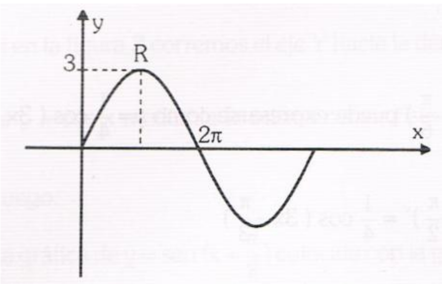


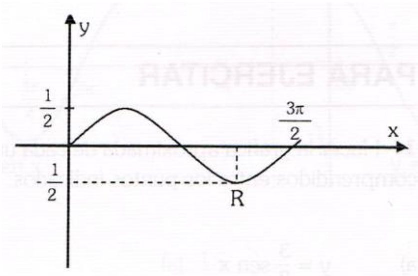


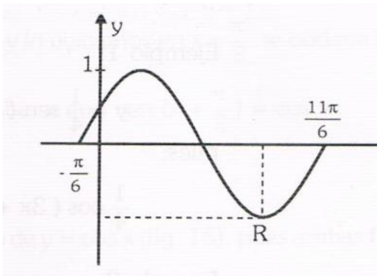


	A	*b*	*Fórmula*	*T*	*Ceros*	*Máximo*	*Mínimo*	*C*$^+$	*C*$^-$
f_1									
f_2									
f_3									
f_4									
f_5									
f_6									

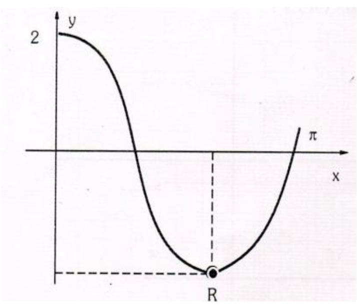
EJERCICIO Nº9: Para cada uno de los siguientes gráficos correspondientes a la función seno, hallar su expresión funcional y el valor de abscisa del punto R. Analizar.

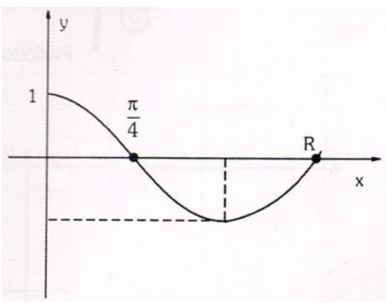


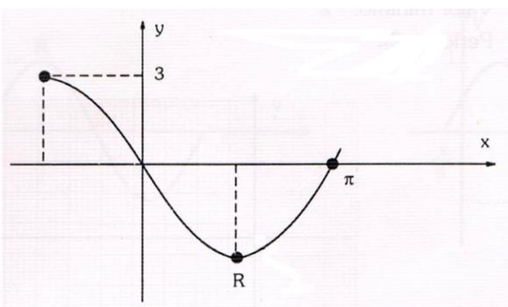




EJERCICIO Nº10: Para cada uno de los siguientes gráficos correspondientes a la función coseno, hallar su expresión funcional y el valor de abscisa del punto R. Analizar.

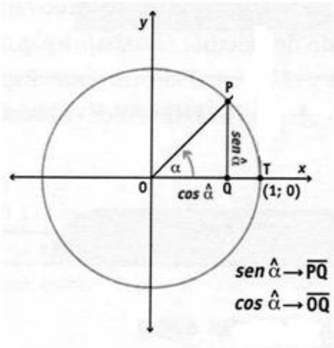






Relación Pitagórica

De la circunferencia trigonométrica y el ángulo que se observa en la figura, Pitágoras aplicó su Teorema hallando así la siguiente relación:



$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Relación Pitagórica

Esta relación es muy útil para hallar todas las razones trigonométricas de un ángulo conociendo sólo una de ellas. Un caso particular ocurre cuando la razón dada es tangente (o cotangente). En este caso, se deberá dividir a la razón pitagórica por $cos^2\alpha$ (por $sen^2\alpha$ en el caso de la cotangente).

Ejemplo: sabiendo que $sen\ \alpha = -\frac{1}{2}$ y α pertenece al cuarto cuadrante, hallar las restantes razones trigonométricas.

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + cos^2\alpha = 1$

$\frac{1}{4} + cos^2\alpha = 1$

$cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{4}$

$\cos\alpha = \left|\sqrt{\frac{3}{4}}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Como $\alpha \in 4^{\underline{o}}\ Cuadrante$, el valor del coseno es positivo. Luego $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$ $\qquad cotg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$

Ejemplo: sabiendo que $tg\ \alpha = \frac{4}{3}$ y $\alpha \in 3^{\underline{o}}\ Cuadrante$, hallar las restantes razones trigonométricas.

En primer lugar debemos transformar la relación pitagórica para que aparezca la tangente. Para ello dividimos ambos miembros por $cos^2\alpha$

$\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$ Simplificando y recordando que $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$ nos queda:

$tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{cos^2\alpha}$

$\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{cos^2\alpha}$

$\dfrac{16}{9} + 1 = \dfrac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow \dfrac{25}{9} = \dfrac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos^2\alpha = \dfrac{9}{25}$

A partir de aquí, el ejercicio resulta similar al anterior ejemplo.

$\cos\alpha = \left|\sqrt{\frac{9}{25}}\right| = \left|\frac{3}{5}\right|$ en el tercer cuadrante, la razón coseno toma valores negativos así que: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{sen\ \alpha}{-\frac{3}{5}}$ Despejando obtenemos que: $\text{sen}\ \alpha = -\frac{4}{5}$

Las demás razones quedan a cargo de los alumnos

EJERCICIO Nº11: Sin calcular el valor de α, encontrar todas las razones trigonométricas, utilizando la información que se da en cada caso.

a) $sen\ \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{20}}{5}$ $\quad y \quad \alpha \in 2^{\text{o}}\ cuadrante$
b) $cos\ \hat{\alpha} = -\frac{\sqrt{26}}{26}$ $\quad y\ \ tg\ \alpha > 0$
c) $cotg\ \ \hat{\alpha} = 1$ $\quad y \quad cosec\ \alpha < 0$
d) $tg\ \hat{\alpha} = 4$ $\quad \alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$
e) $cosec^2\ \hat{\alpha} = 2$ $\quad \alpha \in 3^{\text{o}}\ cuadrante$
f) $sec\ \hat{\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad \alpha \in 4^{\text{o}}\ cuadrante$

EJERCICIO Nº12: Si $sen\ \hat{\alpha} = 0{,}8$ y el ángulo NO perteneces al primer cuadrante, hallar el valor de $cotg\ \hat{\alpha}$.

EJERCICIO Nº13: Si $sec\ \hat{\alpha} = -3$ y el ángulo NO perteneces al segundo cuadrante, hallar el valor de $tg\ \hat{\alpha}$

Identidades Trigonométricas

Las identidades trigonométricas son igualdades en las cuales aparecen razones trigonométricas y resultan verdaderas para cualquier valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.
Para demostrar o resolver una identidad trigonométrica:

01. *Se desarrollan uno o ambos miembros de la misma, tratando de obtener expresiones equivalentes. Para ello se utilizan las relaciones que se establecen entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.*

02. *Se trabaja algebraicamente en cada miembro (NO se pueden pasar términos al otro miembro) hasta hallar la expresión más reducida posible.*

Algunas equivalencias que sirven para resolver identidades trigonométricas son:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ $\qquad tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$ $\qquad sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\qquad cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}$

Ejemplo: demostrar la siguiente identidad trigonométrica: $tg^2\alpha + sen\ \alpha\, .cosec\ \alpha = sec^2\alpha$

01. Transformamos la expresión en términos de senos y cosenos

$$\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \cancel{sen}\ \alpha\, .\frac{1}{\cancel{sen\ \alpha}} = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

02. Hallamos el común denominador del miembro de la izquierda:

$$\frac{sen^2\alpha + 1\, .cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

03. Utilizando la identidad pitagórica obtenemos la igualdad

$$\frac{1}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

EJERCICIO Nº14: Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

a) $(1-\cos\alpha).(1+\sec\alpha).cotg\ \alpha = \ sen\ \alpha$

b) $(1-sen^2\alpha).(1+tg^2\alpha)=1$

c) $sec^2\alpha\ .\ cosec^2\alpha = sec^2\alpha + \ \ cosec^2\alpha$

d) $cosec^2\alpha\ .\ (1-cos^2\alpha)=1$

e) $1-\frac{cos^2\alpha}{1+sen\ \alpha} = \ sen\ \alpha$

f) $sec^2\alpha\ .\ (cosec^2\alpha - 1) = cosec^2\alpha$

g) $2\ .cosec\alpha = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{sen\alpha}$

h) $\frac{1}{1-sen\alpha}+\frac{1}{1+sen\alpha}=2\ sec^2\alpha$

i) $(1-tg\ \alpha).\ (1+tg\ \alpha) = 2-\ sec^2\alpha$

j) $\sec\alpha - cos\ \alpha = \ tg\ \alpha\ .\ sen\ \alpha$

k) $\frac{1}{\sec\alpha}\ .\cos\alpha + sen\ \alpha\ .\frac{1}{cosec\ \alpha}=1$

l) $cotg^2\alpha + \frac{1}{tg\ \alpha\ .\ cotg\ \alpha} = \ cosec^2\alpha$

Ecuaciones Trigonométricas

Como las ecuaciones trigonométricas son periódicas y sus valores se repiten cíclicamente, es habitual que las ecuaciones que las involucran tengan infinitas soluciones que también se repiten cíclicamente.

Para resolver una **ecuación trigonométrica** haremos las transformaciones necesarias para trabajar con una sola función trigonométrica, para ello utilizaremos las identidades trigonométricas.

En las siguientes actividades se buscarán las soluciones que pertenezcan al intervalo$[0^o;360^o)$ o, equivalentemente $[0\ ;2\pi)$ (soluciones particulares) y el conjunto de todas las soluciones posibles dada por la clase angular a la que pertenecen (solución general)

Ejemplo:

I) Hallar los valores de x que verifican $sen\ x = -\frac{1}{2}$

- Calcularemos el valor de x aplicando lo visto anteriormente:

$$x = arc\ sen\ \left|-\frac{1}{2}\right|$$
$$x=\frac{\pi}{6}$$

- Con la circunferencia trigonométrica se analiza donde existen valores de x que verifiquen la igualdad. Sabemos que el seno posee valores negativos en dos cuadrantes (III y IV cuadrante).

Solución en el III cuadrante: $x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$

Solución en el IV cuadrante: $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

Luego, la solución particular de la ecuación es $S = \left\{\frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi\right\}$ y la solución general es $C_{\frac{7}{6}\pi} \cup C_{\frac{11}{6}\pi}$

II) Hallar los valores de x que verifican $cos^2\ x = \frac{3}{4}$

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = -\ \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad \cos x = \ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego se deberá resolver cada ecuación por separado para hallar todas las soluciones posibles.

EJERCICIO Nº15: Hallar las soluciones particulares y generales de las siguientes ecuaciones.

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ *b)* $\operatorname{tg} x = 1$ *c)* $\sqrt{2}\cos x = 1$ *d)* $3 \,.\, tgx + \sqrt{3} = 0$

e) $\sec x = -\sqrt{2}$ *f)* $1 - cotg^2\, x = \frac{2}{3}$ *g)* $4\, sen^2\, x = 1$ *h)* $\frac{3}{2}.\, cosec = -\sqrt{3}$

EJERCICIO Nº16: Encontrar los valores de $x\epsilon[0\,;2\pi)$que verifiquen las siguientes ecuaciones. Escribir los conjuntos soluciones (particular y general) en cada caso.

a) $2\cos x - 1 = 0$ *b)* $4\, cos^2 x - 1 = 0$ *c)* $tg\ x - \sqrt{3} = 0$

d) $cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ *e)* $sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *f)* $tg\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\sqrt{3}$

g) $sec\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = -1$ *h)* $cosec\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -2$ *i)* $cotg\left(x - \frac{5}{6}\pi\right) = 1$

j) $2\, cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ *k)* $sen^2 x + \frac{7}{2}\ sen\ x = 2$ *l)* $\sqrt{3}cos^2\ x - \frac{3}{2}\ \cos\ x = 0$

m) $cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$ *n)* $2\sec x = tg\ x + cotg\ x$ *o)* $tg\ x + 3\ cotg\ x = 4$

p) $sen\ x - 2\ sen\ x\,.\cos x = 0$ *q)* $2\ tg^2 x + \sec^2 x = 2$ *r)* $sec\ x + tg\ x = 0$

s) $2\ sen\ x - cosec\ x = 1$ *t)* $(tg\ x - 1).(4\ sen^2 x - 3) = 0$ *u)* $sen^2 x = 3\ cos^2$

Respuestas

EJERCICIO Nº1 $\widehat{\alpha} = 120°$ $\hat{\beta} = 315º$ $\hat{\theta} = 210º$ $\hat{\gamma} = 288º$ $\hat{\mu} = 40$ $\hat{\delta} = 249º\,56'\,11''$

$\hat{\rho} = 48º\,43'\,34''$ $\hat{\varphi} = 90º$ $\widehat{\omega} = 57º\,19'\,29''$ $\hat{\varepsilon} = 225º$

EJERCICIO Nº2 $\widehat{\alpha} = \frac{2}{3}\pi$ $\hat{\beta} = \frac{7}{6}\pi$ $\hat{\theta} = \frac{31}{36}\pi$ $\hat{\gamma} = \frac{17}{9}\pi$ $\hat{\mu} = \frac{1}{12}\pi$

$\hat{\delta} = 0{,}353$ $\hat{\rho} = 3{,}325$ $\hat{\varphi} = 4{,}159$ $\widehat{\omega} = 5{,}408$

EJERCICIO Nº3 $a)\ C_{96º}$ $b)\ C_{125º}$ $c)\ C_{56º}$ $d)\ C_{213º}$

EJERCICIO Nº4 $a)\ C_{\frac{5}{6}\pi}$ $b)\ C_{\frac{3}{4}\pi}$ $c)\ C_{\frac{1}{5}\pi}$ $d)\ C_{\frac{2}{3}\pi}$

EJERCICIO Nº5 V F F F V V

EJERCICIO Nº6

$Interv.$	$Dom\ f(x)$	$Im\ f(x)$	C_0	C_+	C_-
$\left[-\pi; \frac{5}{2}\pi\right)$	$\mathbb{R}$	$\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$	$\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right)$	$\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$

$Interv.$	$Dom\ f(x)$	$Im\ f(x)$	C_0	C_+	C_-
$\left(\frac{5}{2}\pi\,; \pi\right]$	$\mathbb{R}$	$[-2; 2]$	$\{-2\pi; -\pi; 0; \pi\}$	$\left(-\frac{5}{2}\pi; -2\pi\right) \cup (-\pi; 0)$	$(-2\,\pi; -\pi) \cup (0; \pi)$

EJERCICIO Nº7

	Amplitud (A)	***Pulsación (b)***	***Período (T)***	***Ángulo de fase***
$y = -2\ sen\ x$	2	1	2π	0
$y = 5\ sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$	5	2	π	$\frac{\pi}{6}$
$y = -sen\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\pi\right)$	1	$\frac{1}{3}$	6π	$-\frac{\pi}{3}$
$y = \frac{5}{2}\ cos\ x$	$\frac{5}{2}$	1	2π	0
$y = -2cos\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{12}\right)$	2	$\frac{1}{4}$	8π	$\frac{\pi}{3}$
$y = 4\ cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$	4	2	π	$-\frac{\pi}{4}$

EJERCICIO Nº8

	A	b	Fórmula	T	Ceros	Máx	Mín	C^+	C^-
f_1	3	2	$f_1(x) = 3\ sen\ (2x)$	π	$\left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}$	$\left(\frac{1}{4}\pi; 3\right)$	$\left(\frac{3}{4}\pi; -3\right)$	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
f_2	2	$\frac{2}{3}$	$f_2(x) = 2\ sen\ \left(\frac{2}{3}x\right)$	3π	$\left\{0; \frac{3}{2}\pi\right\}$	$\left(\frac{3}{4}\pi; 2\right)$	$\left(\frac{9}{4}\pi; -2\right)$	$\left(0; \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi; 3\pi\right)$
f_3	2	$\frac{1}{3}$	$f_3(x) = -2\ sen\ \left(\frac{1}{3}x\right)$	6π	$\{0;\ 3\pi\}$	$\left(\frac{9}{2}\pi; 2\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi; -2\right)$	$(3\pi; 6\pi)$	$(0;\ 3\pi)$
f_4	1	4	$f_4(x) =\ cos\ (4x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left\{\frac{\pi}{8}; \frac{3}{8}\pi\right\}$	$(0\ ;\ 1)$	$\left(\frac{1}{4}\pi; -1\right)$	$\left(0; \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8}\pi; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{8};\ \frac{3}{8}\pi\right)$
f_5	2	1	$f_5(x) = 2\ cos\ (x)$	2π	$\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$	$(0\ ;\ 2)$	$(\pi; -2)$	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi\right)$
f_6	3	$\frac{2}{3}$	$f_6(x) = -3\ cos\ \left(\frac{2}{3}x\right)$	3π	$\left\{\frac{3}{4}\pi;\ \frac{9}{4}\pi\right\}$	$\left(\frac{3}{2}\pi;\ 3\right)$	$(0;\ -3)$	$\left(\frac{3}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi\right)$	$\left(0; \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{9}{4}\pi; 3\pi\right)$

EJERCICIO Nº9

$f(x) = 3\ sen\ \left(\frac{1}{2}x\right)$ $\qquad R = (\pi; 3)$

$f(x) = \frac{1}{2}\ sen\ \left(\frac{4}{3}x\right)$ $\qquad R = \left(\frac{9}{8}\pi; -\frac{1}{2}\right)$

$f(x) =\ sen\ \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad R = \left(\frac{4}{3}\pi; -1\right)$

EJERCICIO Nº10

$f(x) = 2\ cos\ \left(\frac{3}{2}x\right)$ $\qquad R = \left(\frac{2}{3}\pi; -2\right)$

$f(x) =\ cos\ (2x)$ $\qquad R = \left(\frac{3}{4}\pi; 0\right)$

$f(x) = 3\ cos\ \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad R = \left(\frac{\pi}{2}; -3\right)$

EJERCICIO Nº11

a)

$cos\ \hat{\alpha}$	$tg\ \hat{\alpha}$	$cosec\ \hat{\alpha}$	$sec\ \hat{\alpha}$	$cotg\ \hat{\alpha}$
$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	-2	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$-\sqrt{5}$	$-\frac{1}{2}$

b)

$sen\ \hat{\alpha}$	$tg\ \hat{\alpha}$	$cosec\ \hat{\alpha}$	$sec\ \hat{\alpha}$	$cotg\ \hat{\alpha}$
$-\frac{5\sqrt{26}}{26}$	5	$-\frac{\sqrt{26}}{5}$	$-\sqrt{26}$	$\frac{1}{5}$

c)

$cos\ \hat{\alpha}$	$sen\ \hat{\alpha}$	$cosec\ \hat{\alpha}$	$sec\ \hat{\alpha}$	$tg\ \hat{\alpha}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1

d)

$cos\ \hat{\alpha}$	$sen\ \hat{\alpha}$	$cosec\ \hat{\alpha}$	$sec\ \hat{\alpha}$	$cotg\ \hat{\alpha}$
$-\frac{\sqrt{17}}{17}$	$-\frac{4\sqrt{17}}{17}$	$-\frac{\sqrt{17}}{4}$	$-\sqrt{17}$	$\frac{1}{4}$

e)

$cos\ \hat{\alpha}$	$sen\ \hat{\alpha}$	$tg\ \hat{\alpha}$	$sec\ \hat{\alpha}$	$cotg\ \hat{\alpha}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	1

f)

$cos\ \hat{\alpha}$	$sen\ \hat{\alpha}$	$tg\ \hat{\alpha}$	$cosec\ \hat{\alpha}$	$cotg\ \hat{\alpha}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\sqrt{3}$

EJERCICIO Nº12 $\quad cotg\ \hat{\alpha} = -\frac{3}{4}$

EJERCICIO Nº13 $\quad tg\ \hat{\alpha} = 2\sqrt{2}$

EJERCICIO Nº15

a) $S = \left\{\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{2}{3}\pi} \cup C_{\frac{4}{3}\pi}$

b) $S = \left\{\frac{1}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{1}{4}\pi} \cup C_{\frac{5}{4}\pi}$

c) $S = \left\{\frac{1}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{1}{4}\pi} \cup C_{\frac{7}{4}\pi}$

d) $S = \left\{\frac{5}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{5}{6}\pi} \cup C_{\frac{11}{6}\pi}$

e) $S = \left\{\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{3}{4}\pi} \cup C_{\frac{5}{4}\pi}$

f) $S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{3}} \cup C_{\frac{2}{3}\pi} \cup C_{\frac{4}{3}\pi} \cup C_{\frac{5}{3}\pi}$

$g)\ S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5}{6}\pi;\frac{7}{6}\pi;\frac{11}{6}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{6}}\cup C_{\frac{5}{6}\pi}\cup C_{\frac{7}{6}\pi}\cup C_{\frac{11}{6}\pi}$ $\qquad h)\ S=\left\{\frac{4}{3}\pi;\frac{5}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{4}{3}\pi}\cup C_{\frac{5}{3}\pi}$

EJERCICIO Nº16

$a)\ S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{5}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{3}}\cup C_{\frac{5}{3}\pi}$

$b)\ S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi;\frac{5}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{3}}\cup C_{\frac{2}{3}\pi}\cup C_{\frac{4}{3}\pi}\cup C_{\frac{5}{3}\pi}$

$c)\ S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{5}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{3}}\cup C_{\frac{5}{3}\pi}$

$d)\ S=\left\{\frac{1}{12}\pi;\frac{17}{12}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{1}{12}\pi}\cup C_{\frac{17}{12}\pi}$

$e)\ S=\left\{\frac{2}{3}\pi;\ \pi\right\}$ $\quad C_{\frac{2}{3}\pi}\cup C_{\pi}$

$f)\ S=\left\{\frac{11}{12}\pi;\frac{23}{12}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{11}{12}\pi}\cup C_{\frac{23}{12}\pi}$

$g)\ S=\left\{\frac{13}{12}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{13}{12}\pi}$

$h)\ S=\left\{\frac{2}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{2}{3}\pi}\cup C_{\frac{4}{3}\pi}$

$i)\ S=\left\{\frac{13}{12}\pi;\frac{25}{12}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{13}{12}\pi}\cup C_{\frac{25}{12}\pi}$

$j)\ S=\left\{\frac{2}{3}\pi;\ \pi;\ \frac{4}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{2}{3}\pi}\cup C_{\pi}\cup C_{\frac{4}{3}\pi}$

$k)\ S=\left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{5}{6}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{6}}\cup C_{\frac{5}{6}\pi}$

$l)\ S=\left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi;\frac{11}{6}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{6}}\cup C_{\frac{\pi}{2}}\cup C_{\frac{3}{2}\pi}\cup C_{\frac{11}{6}\pi}$

$m)\ S=\{0\}$ $\quad C_0$

$n)\ S=\left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{5}{6}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{6}}\cup C_{\frac{5}{6}\pi}$

$o)\ S=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{5}{4}\pi;\ 1{,}25;\ 4{,}39\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{4}}\cup C_{\frac{5}{4}\pi}\cup C_{1{,}25}\cup C_{4{,}39}$

$p)\ S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{5}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{3}}\cup C_{\frac{5}{3}\pi}$

$q)\ S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5}{6}\pi;\frac{7}{6}\pi;\frac{11}{6}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{6}}\cup C_{\frac{5}{6}\pi}\cup C_{\frac{7}{6}\pi}\cup C_{\frac{11}{6}\pi}$

$r)\ S=\phi$ $\quad$ ---

$s)\ S=\left\{\frac{\pi}{2};\ \frac{7}{6}\pi;\frac{11}{6}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{2}}\cup C_{\frac{7}{6}\pi}\cup C_{\frac{11}{6}\pi}$

$t)\ S=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi;\frac{5}{4}\pi;\frac{4}{3}\pi;\frac{5}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{4}}\cup C_{\frac{\pi}{3}}\cup C_{\frac{2}{3}\pi}\cup C_{\frac{5}{4}\pi}\cup C_{\frac{4}{3}\pi}\cup C_{\frac{5}{3}\pi}$

$u)\ S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi;\frac{5}{3}\pi\right\}$ $\quad C_{\frac{\pi}{3}}\cup C_{\frac{2}{3}\pi}\cup C_{\frac{4}{3}\pi}\cup C_{\frac{5}{3}\pi}$

UNIDAD Nº 6

La geometría analítica es la rama de la matemática que estudia la relación entre el algebra y la geometría.

Resulta útil para programar una computadora y ver gráficos de distintas figuras en tres dimensiones, ya que las rectas en el plano y en el espacio, o los planos en el espacio, pueden expresarse a través de operaciones entre vectores.

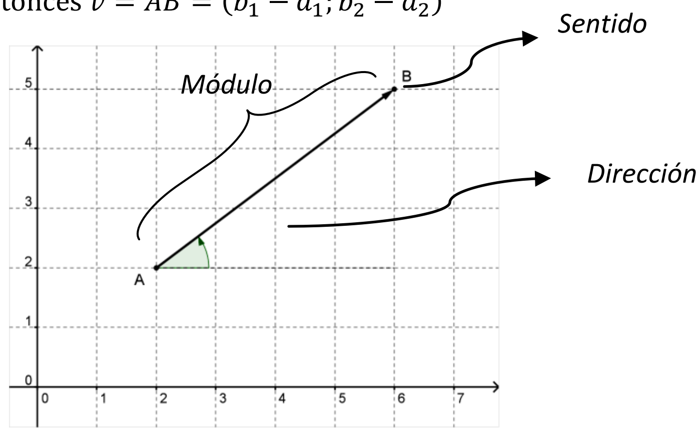
De esta manera, es posible encontrar regularidades y propiedades que los caracterizan.

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Vectores

Se llama Vector AB al segmento orientado que empieza en A y termina en B. Simbólicamente se escribe $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ El punto **A** se llama **Origen** y el punto **B extremo.**

Si $A = (a_1; a_2)$ y $B = (b_1; b_2)$, entonces $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$

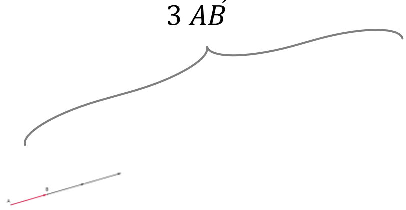


Ejemplo: Sea $A = (1; 5)$ y $B = (3; 8)$, entonces

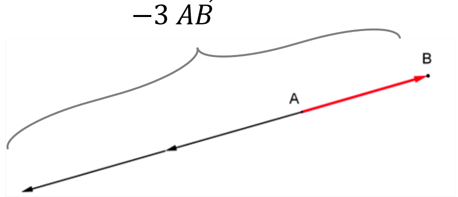
$\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 8 - 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (2; 3)$ **Vector director** de la recta que pasa por A y B

El producto de un vector $\vec{v}$ por un escalar (número real), es un vector que tiene igual dirección que $\vec{v}$, y cuyo módulo es el producto del módulo de $\vec{v}$ por el número real dado. El sentido dependerá del signo del escalar: si el escalar es positivo, el nuevo vector tendrá el mismo sentido que $\vec{v}$, de caso contrario será de sentido opuesto.

$3\,\overrightarrow{AB}$

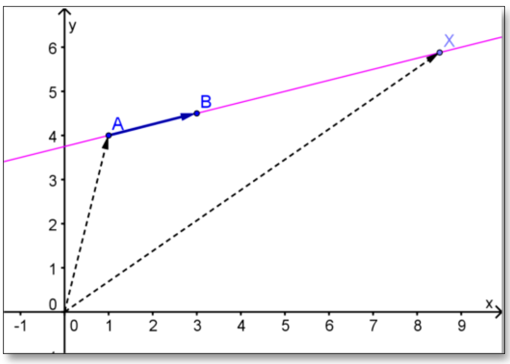


$-3\,\overrightarrow{AB}$



ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA

Consideremos el sistema de ejes cartesianos y en él una recta L. En L dos puntos, por ejemplo A y B.
Para hacer una ecuación vectorial necesitamos un vector posición y un vector director.



El vector posición es el vector que tiene por origen el (0;0) y extremo A.
Cualquier punto X de la recta L, se obtiene de la suma vectorial del vector posición de A y una cierta cantidad de veces el vector director AB. Luego podemos escribir:

$$L: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{AB}$$
$$L: (x; y) = (a_1 ; a_2) + k.(b_1 - a_1 ; b_2 - a_2) \qquad k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: Sea A=(1;5) y B=(3;8). Hallar la ecuación vectorial de la recta L que pasa por A y B.

$\overrightarrow{AB} = (3 - 1 ;\ 8 - 5)$ → $\overrightarrow{AB}$ =(2;3) **Vector director** de la recta que pasa por A y B

$$L: (x; y) = (1 ; 5) + k.(2 ; 3) \qquad k \in \mathbb{R}$$

ECUACION PARAMETRICA DE LA RECTA

A partir de la expresión de la Ecuación Vectorial de la Recta podemos obtener las ecuaciones Paramétricas de la misma.

$$L: (x; y) = (a_1 ; a_2) + k.(b_1 - a_1 ; b_2 - a_2) \qquad k \in \mathbb{R}$$

Si realizamos las operaciones podemos escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$L: (x; y) = (a_1 + k.(b_1 - a_1); a_2 + k.(b_2 - a_2)) \qquad k \in \mathbb{R}$$

L: $\begin{cases} x = a_1 + k.(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + k.(b_2 - a_2) \end{cases}$

Ejemplo: Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta $L: (x; y) = (1 ; 5) + k.(2 ; 3) \quad k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 1 + k.2 \\ y = 5 + k.3 \end{cases}$$

Para verificar si un punto pertenece o no a la recta, debemos hallar el valor de k. Como el valor debe ser único, debe verificar ambas ecuaciones paramétricas. En caso de no verificar ambas ecuaciones el punto no pertenece a la recta.

Ejemplos:

I) Verificar si el punto (9; 17) pertenece a la recta $L: (x; y) = (1 ; 5) + k.(2 ; 3) \quad k \in \mathbb{R}$

Hallamos la ecuación paramétrica de la recta L: $\begin{cases} x = 1 + k.2 \\ y = 5 + k.3 \end{cases}$

$9 = 1 + k.2$ | $17 = 5 + k.3$
$8 = k.2$ | $12 = k.3$
$4 = k$ | $4 = k$

Luego el punto (9; 17) pertenece a la recta L

II) Hallar la ordenada al origen de la recta $m: (x; y) = (6; 2) + k.(2 ; 3) \quad k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 6 + k.2 \\ y = 2 + k.3 \end{cases}$$

La ordenada al origen es el punto de intersección de la recta con el eje "y", por eso $x = 0$

$0 = 6 + k.2$ despejando k, obtenemos: $k = -3$

Reemplazando $k = -3$ en la coordenada y: $\quad y = 2 + (-3).3 = -7$

La ordenada al origen de m es: $(0; -7)$

Ecuación Vectorial de la recta a partir de su expresión cartesiana

Dada la ecuación cartesiana de una recta $L: \ y = mx + b$, deseamos expresarla en forma vectorial.

Existen dos formas para hallar la expresión vectorial de L:

Forma 1: Cada punto de la recta tiene coordenadas $(x; y)$, entonces escribiremos los puntos del plano de la recta L de la siguiente forma:

$$L: (x; y) = (x ; y) = (x ; mx + b)$$
$$L: (x; y) = (x ; mx) + (0; b)$$
$$L: (x; y) = x.(1; m) + (0; b)$$

$$\boxed{L: (x; y) = k.(1; m) + (0; b) \qquad k \in \mathbb{R}}$$

Forma 2: Podemos darle valores a x para obtener su imagen. Luego de hallar dos puntos de la recta, se podrá calcular el vector director. La ordenada al origen de $L: \ y = mx + b$ es $(0; b)$. De esta forma la recta tiene una expresión:

$A = (x_1; y_1) \quad B = (x_2; y_2) \quad \rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$

$$L: (x; y) = k.(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1) + (0; b) \qquad k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: Hallar la ecuación vectorial de la recta $L: \ y = 3x - 5$

- *Forma 1:* $m = 3 \quad b = -5 \quad \rightarrow \quad L: (x; y) = k.(1; 3) + (0; -5) \qquad k \in \mathbb{R}$

- *Forma 2:*

$Para\ x = 1 \quad y = 3.1 - 5 = -2 \ \rightarrow \ (1; -2)$
$Para\ x = 2 \quad y = 3.2 - 5 = 1 \quad \rightarrow \ (2; 1)$
$\vec{v} = \big(2 - 1; 1 - (-2)\big) = (1; 3)$ entonces: $\quad L: (x; y) = k.(1; 3) + (0; -5) \qquad k \in \mathbb{R}$

Rectas Paralelas

Dos rectas, en forma vectorial, son paralelas si poseen igual vector director

Ejemplo: Hallar la ecuación vectorial de la recta M, paralela a $L: \ k.(-2; 1) + (1; 3), \ k \in \mathbb{R}$ que pasa por el punto $(-3; -4)$

$$M: (x; y) = k.(-2; 1) + (-3; -4), \qquad k \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO Nº1: Hallar la ecuación vectorial y paramétricas de la recta que pasa por los siguientes puntos. Graficar

a) $A = (-1\,; 4) \qquad B = (3\,; 2)$
b) $T = (2\,; 5) \qquad R = (-2\,; -1)$
c) $M = (2\,; 5) \qquad N = (-1\,; 5)$
d) $P = (2\,; 3) \qquad Q = (5\,; 2)$

EJERCICIO Nº2: Hallar la ecuación vectorial de la recta que posee igual vector director que $y = -x + 6$ y pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO Nº3: Hallar la ecuación vectorial y paramétrica de la recta que es paralela a $y = 5x + 1$ y que pasa por el $(2\,; 1)$

EJERCICIO Nº4: La ecuación de la recta R es $-3y + 6 = x$. Escribir la ecuación vectorial y paramétrica de una recta cuya representación gráfica sea:

a) Una recta A, paralela a R, que pase por el punto $(3\,; \ -2)$
b) Una recta B que no sea paralela a R y que tenga la misma ordenada al origen que R
c) Una recta D, paralela al eje x, que tenga la misma ordenada al origen que R

EJERCICIO Nº5: La recta M tiene por ecuación $M: (x; y) = k.(-2; 1) + (-3; -4),\ k \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Hallar la ordenada al origen de M
b) Verificar si los puntos A= (-17;3) B=(1;6) y C=(-11;0) pertenecen a M
c) Escribir la expresión cartesiana de la recta M.

EJERCICIO Nº6: Hallar las ecuaciones vectoriales de las rectas que cumplen con las condiciones pedidas en cada caso.

a) R es paralela a $y = 2x + 3$ y pasa por $(8\,;3)$
b) M es paralela a la recta NB y pasa por $A = (2\,;4)$, siendo $N = (3\,;2)$ y B= $(4\,;5)$

Producto escalar entre vectores

Se define el producto escalar entre el vector $\vec{u} = (x_1; y_1)\ y\ \vec{v} = (x_2; y_2)$ como:

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2$$

Se dice que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0.

Ejemplo: Hallar el producto escalar de los siguientes vectores:

a) $\vec{u} = (1; 3)\ y\ \vec{v} = (-1; 2)$ $\quad \vec{u}.\vec{v} = 1.(-1) + 3.2 = -1 + 6 = 5$

b) $\vec{u} = (-3; 2)\ y\ \vec{v} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ $\quad \vec{u}.\vec{v} = (-3).\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{2} = -1 + 1 = 0 \quad \vec{u} \perp \vec{v}$

Rectas Perpendiculares

Dos rectas L y M, escritas en forma vectorial, son perpendiculares si el producto escalar entre sus vectores directores es cero.

Ejemplo: Hallar la ecuación vectorial de la recta R, perpendicular a $L:\ k.(-1; 3) + (-1; 2),\ k \in \mathbb{R}$ que pasa por el punto $(2; 3)$

$\vec{u} = (-1; 3)\ y\ \vec{v} = (a; b)$ $\quad \vec{u}.\vec{v} = a.(-1) + 3.b = 0$ $\quad$ despejando una de las incógnitas: $b = \frac{1}{3}a$

$$\vec{v} = (a; b) = \left(a; \frac{1}{3}a\right)\ \ para\ a = 1\ resulta\ \ \vec{v} = \left(1; \frac{1}{3}\right)$$

$$R: (x; y) = k.\left(1; \frac{1}{3}\right) + (2; 3), \qquad k \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO Nº7: Si R es la recta de ecuación: $y = -\frac{1}{2}x - 2$,

a) Escribir la ecuación vectorial de una recta L paralela a R y de ordenada al origen 4.
b) Escribir la ecuación de una recta S perpendicular a R sabiendo que el punto (0, -1) pertenece a S.

EJERCICIO Nº8: Encontrar la ecuación vectorial de las rectas que verifican las siguientes condiciones:

a) Pasa por el $(1\,;1)$ y es paralela a $y = 2x - 3$
b) Pasa por $(-1\,;0)$ y por $(0\,;3)$
c) Pasa por el $(2\,;0)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $y = -x + 2$
d) Es paralela a $y = \frac{1}{2}x - 3$ y su ordenada al origen es 5

EJERCICIO Nº9: La ecuación de la recta T es $6 - 3y = 4x$. Escribir la ecuación vectorial de la recta cuya representación gráfica sea:

a) Una recta M, perpendicular a T, que pase por el punto $(4\,;2)$
b) Una recta Q, paralela a T, que corte al eje x en $x = 5$
c) Una recta H, no perpendicular ni paralela a T, pero que tenga la misma ordenada al origen que T

EJERCICIO Nº10: ¿Es verdad que la recta G que pasa por los puntos $(-2; 36)$ y $(2; 39)$ es perpendicular a la recta T del punto anterior? Justificar

EJERCICIO Nº11: Considerando el triángulo ABC, cuyos vértices son: $A = (2\,;5)$, $B = (0\,;3), C = (t\,;-5)$.

a) Hallar la ecuación vectorial de la recta que contiene al lado AB
b) Hallar el valor de t para que el triángulo sea rectángulo en B

Respuestas

EJERCICIO Nº1 $a)\ L: (x; y) = k\ (4; -2) + (-1; 4) \quad k \in \mathbb{R}$ $\quad L: \begin{cases} x = -1 + 4k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$

$b)\ M: (x; y) = k\ (-4; -6) + (2; 5) \quad k \in \mathbb{R}$ $\quad M: \begin{cases} x = 2 - 4k \\ y = 5 - 6k \end{cases}$

$c)\ N: (x; y) = k\ (-3; 0) + (2; 5) \quad k \in \mathbb{R}$ $\quad N: \begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 5 \end{cases}$

$d)\ P: (x; y) = k\ (3; -1) + (2; 3) \quad k \in \mathbb{R}$ $\quad P: \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 3 - k \end{cases}$

EJERCICIO Nº 2 $L: (x; y) = k\ (1; -1) + (0; 0) \quad k \in \mathbb{R}$

EJERCICIO Nº 3 $R: (x; y) = k\ (1; 5) + (2; 1) \quad k \in \mathbb{R}$

EJERCICIO Nº 4 $a)\ A: (x; y) = k\ \left(1; -\frac{1}{3}\right) + (3; -2) \quad k \in \mathbb{R}$

$b)\ B: (x; y) = k\ (1; 1) + (0; 2) \quad k \in \mathbb{R}$ pueden existir infinitas con distinto vector director

$c)\ D: (x; y) = k\ (1; 0) + (0; 2) \quad k \in \mathbb{R}$

EJERCICIO Nº 5 $a)\ Ordena: \left(0\,; -\frac{11}{2}\right)$

$b)\ A \in M \quad B \notin M \quad C \in M$

$c)\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$

EJERCICIO Nº 6 $a)\ R: (x; y) = k\ (1; 2\,) + (8; 3) \quad k \in \mathbb{R}$

$b)\ M: (x; y) = k\ (1; 3) + (2; 4) \quad k \in \mathbb{R}$

EJERCICIO Nº 7 $a)\ L: (x; y) = k\ \left(1; -\frac{1}{2}\right) + (0; 4) \quad k \in \mathbb{R}$

$b)\ S: (x; y) = k\ (1; 2) + (0; -1) \quad k \in \mathbb{R}$

EJERCICIO Nº 8 $a)\ R: (x; y) = k\ (1; 2\,) + (1; 1) \quad k \in \mathbb{R}$

$b)\ S: (x; y) = k\ (1; 3) + (-1; 0) \quad k \in \mathbb{R}$

$c)\ M: (x; y) = k\ (1; 1) + (2; 0) \quad k \in \mathbb{R}$

$d)\ W: (x; y) = k\ \left(1; \frac{1}{2}\right) + (0; 5) \quad k \in \mathbb{R}$

EJERCICIO Nº 9 $a)\ M: (x; y) = k\ \left(1; \frac{3}{4}\right) + (4; 2) \qquad k \in \mathbb{R}$

$b)\ Q: (x; y) = k\ \left(1; -\frac{4}{3}\right) + (5; 0) \quad k \in \mathbb{R}$

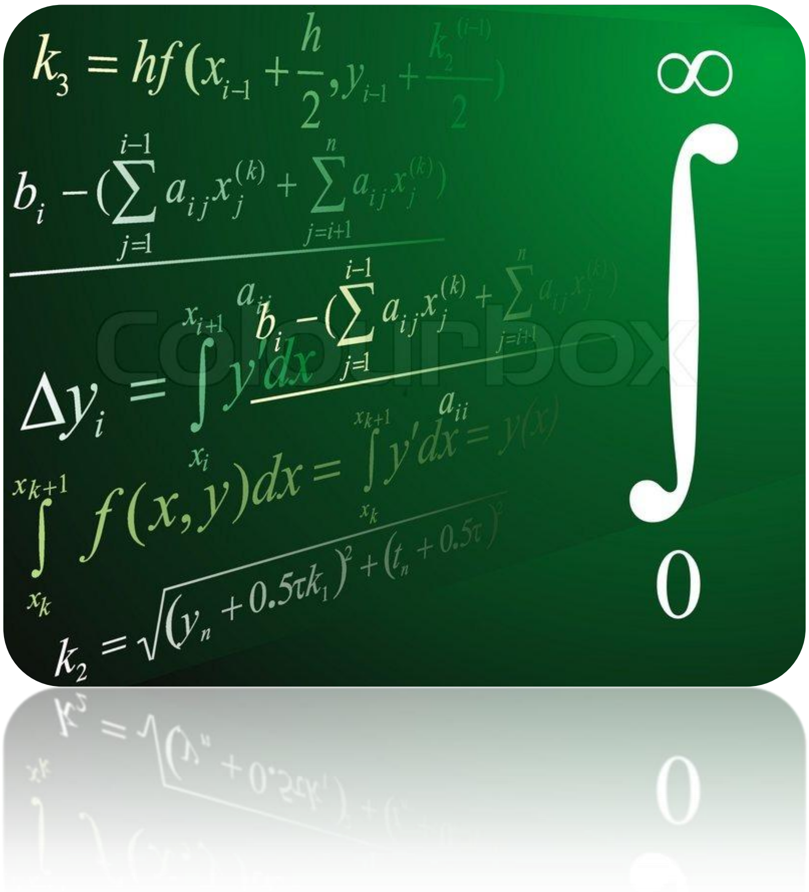
$c)\ H: (x; y) = k\ (1; 1) + (0; 2) \qquad k \in \mathbb{R}$ pueden existir infinitas con distinto vector director a M o Q

EJERCICIO Nº 10 G es perpendicular a T

EJERCICIO Nº 11 $a)\ M: (x; y) = k\ (1; 1) + (2; 5) \quad k \in \mathbb{R}$

$b)\ T: (x; y) = k\ (t; -8) + (0; 3) \quad k \in \mathbb{R} \quad \rightarrow t = 8$

UNIDAD Nº 7



INTEGRALES

La primera técnica sistemática documentada capaz de determinar integrales es el método de exhausción de Eudoxo (370 a. C.), que trataba de encontrar áreas y volúmenes a base de partirlos en un número infinito de formas para las cuales se conocieran el área o el volumen. Este método fue desarrollado y usado más adelante por Arquímedes, que lo empleó para calcular áreas de parábolas y una aproximación al área del círculo. En el *Siddhanta Shiromani*, un libro de astronomía delsiglo XII del matemático indio Bhaskara II, se encuentran algunas ideas de cálculo integral.

A comienzos del siglo XVII, se produjeron nuevos adelantos con las aportaciones de Barrow y Torricelli, que presentaron los primeros indicios de una conexión entre la integración y la derivación.

Primitivas

Como ya sabemos, la derivada de $y = x^3$ es $y' = 3x^2$, y lo escribimos así: $\frac{dy}{dx} = y' = 3x^2$. Esto mismo se puede expresar diciendo que la ***primitiva*** de $3x^2$ es x^3, y lo escribimos así:

$$\int 3x^2\ dx = x^3$$

La obtención de primitivas es, pues, el proceso inverso del de la derivación. Formalmente: $F(x)$ es ***primitiva*** de $f(x)$, si $F'(x) = f(x)$. Entonces se escribe:

$$F(x) = \int f(x)\ dx$$

Cada función tiene infinitas primitivas, pues si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, también lo son todas las funciones $F(x) + c$, cualquiera que sea la constante "c". Por eso, se suele escribir:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c$$

<u>Ejemplo</u>:
$\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} + c$ es decir que $\frac{x^3}{3}$; $\frac{x^3}{3} + \sqrt{3}$; $\frac{x^3}{3} - 7$; $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{5}$, son todas primitivas de x^2 pues si las derivo obtendré nuevamente x^2
A la expresión $\int x^2\ dx$, se la llama también, ***integral indefinida*** o, simplemente, integral de x^2. Por eso, el cálculo de primitivas, se suele llamar cálculo de integrales o integración.

Puesto que el proceso de integración es opuesto del de derivación, muchas de sus propiedades se deducen, inmediatamente, de las propiedades de las derivadas.

La notación $\frac{dy}{dx}$ indica que se va a derivar la función "y" respecto a la variable "x". Análogamente, en la integración, $\int x^2\ dx$ indica que se integrara respecto a la variable "x". Si tuviéramos $\int x^2\ dv$ se integraría respecto a la variable "v" y este caso x^2 sería tomado como constante ya que no depende de la variable "v".

<u>Propiedades de las primitivas</u>

Las propiedades más importantes son:

1. $\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$
2. $\int c.f(x)\ dx = c.\int f(x)\ dx$
3. $\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$
4. $\int x^{-1}\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx = \int \frac{dx}{x} = ln\ x + c$
5. $\int sen\ x\ dx = -\cos x + c$
6. $\int cos\ x\ dx = sen\, x + c$
7. $\int e^x\ dx = e^x + c$
8. $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
9. $\int sec^2 x\ dx = tg\ x + c$
10. $\int cosec^2 x\ dx = -cotg\ x + c$

EJERICICIO Nº1: Calcular las siguientes primitivas y verificar los resultados por derivación

$a)\ \int x^3\, dx =$

$b)\ \int 1\, dx =$

$c)\ \int sen\, x\ \ dx =$

$d)\ \int x^{\frac{1}{2}}\, dx =$

$e)\ \int \frac{dx}{x} =$

$f)\ \int cosec^2 x\ \ dx =$

$g)\ \int sec^2 x\ \ dx =$

$h)\ \int 7x\, dx =$

EJERICICIO Nº2: Calcular las siguientes integrales

$a)\ \int (x^3 + 3x)\, dx =$

$b)\ \int (2x^2 - sen\, x)\, dx =$

$c)\ \int (1 + \cos x)\, dx =$

$d)\ \int \left(\frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{x}\right)\, dx =$

$e)\ \int \left(7y^3 - 9y + \frac{3}{4}\right)\, dy =$

$f)\ \int \frac{8y^4+2y^3-3y+2}{3y^2}\, dy =$

$g)\ \int \left(4\, sen\, y - e^y + \frac{7}{3y}\right)\, dy =$

$h)\ \int \left(\frac{1}{p^2} + p^3\right)^2\, dp =$

$i)\ \int (\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{y})\, dy =$

$j)\ \int \left(\frac{x^3}{a} - \frac{a}{x^3}\right)\, da =$

$k)\ \int \frac{4m^3 - \sqrt{m}}{m}\, dm =$

$l)\ \int \left(\frac{x^3}{a} - \frac{a}{x^3}\right)\, dx =$

Integración por Sustitución

No siempre podemos calcular una integral en forma inmediata aunque a veces sospechemos su respuesta. Existen casos donde es conveniente "sustituir" una parte de la función por una variable al igual que su diferencial. Veamos un ejemplo para ver como se procede

Ejemplo: Calcular $\int \frac{dx}{2x+3} =$

Podemos ensayar reemplazando el denominador por una nueva variable: $g = 2x + 3$
Calculemos su diferencial $dg = 2\, dx \quad \rightarrow \frac{1}{2}dg = dx$ reemplazando todo en la integral original nos queda $\int \frac{\frac{1}{2}dg}{g} =$ como las constantes pueden salir fuera de la integral nos queda esta integral $\frac{1}{2}\int \frac{dg}{g} =$ que ya sabemos resolver $\frac{1}{2}\int \frac{dg}{g} = \frac{1}{2}\ln g + c$
No debemos olvidar que el ejercicio no termina ahí, sino que debemos volver a reemplazar "g" por su valor, ya que el cálculo original dependía de la variable "x"

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ ln(2x + 3) + c$$

EJERICICIO Nº3: Resolver las siguientes integrales por sustitución:

$a)\ \int\ (5+2x)^{28}\, dx =$

$b)\ \int \frac{dx}{4x+7} =$

$c)\ \int \frac{-7x^2}{\sqrt{2x^3+4}}\, dx =$

$d)\ \int cos^3 x\ .\ sen\, x\ \ dx\ \ =$

$e)\ \int tg\, x\ \ dx =$

$f)\ \int 7\ cos(4m-3)\ \ dm =$

$g)\ \int \frac{\cos\ (5m)}{sec^2(5m)}\ dm =$

$h)\ \int \frac{8\ e^x}{5-e^x}\ dx =$

$i)\ \int \frac{-\ 4y}{9+3y^2}\ dy =$

$j)\ \int \frac{5x^4+1}{x+x^5}\ \ dx =$

$k)\ \int e^{5x}\, dx =$

$l)\ \int x.\sqrt{x^2+2}\ \ dx =$

Integración por Partes (o regla del producto)

Recordemos la fórmula de diferenciación (derivación) del producto de funciones:

$D\ [u(x)\ .\ v(x)] = u'(x).\, v(x) +\ u(x).\, v'(x)$

Que expresada en notación diferencial queda así:

$d\ [u(x)\ .\ v(x)] = du(x).\, v(x) +\ u(x).\, dv(x)$

Despejando la última suma, queda:

$u(x).\, dv(x) = d\ [u(x)\ .\ v(x)] - du(x).\, v(x)$

Integrando ambos miembros:

$$\boxed{\int u(x).\, dv(x) = u(x)\ .\ v(x) - \int v(x).\, du(x)}$$

Esta fórmula permite calcular la integral $\int u.\, dv$ a partir de la integral $\int v.\, du$. Si la integral de esta es sencilla, el procedimiento es útil, de lo contrario, debe descartarse. Por eso es fundamental hacer una correcta elección de quién es $u(x)\ \ y\ \ dv(x)$

Ejemplo: Calcular $\int x \,.\, e^x \ dx$

Observemos que, al derivar, x se simplifica, y que al integrar, e^x no se complica. Por lo tanto elegimos

$$u(x) = x \ \rightarrow \ du\,(x) = 1\,dx = dx$$

$$dv(x) = e^x\,dx \ \rightarrow \ v(x) = \int e^x\,dx = e^x$$

Con estos datos, y utilizando la fórmula antes vista, resulta:

$$\int x\,.\,e^x \ dx = u\,.\,v - \int v.\,du = x.\,e^x - \int e^x\,dx \ = x.\,e^x - e^x + c$$

EJERICICIO Nº4: Resolver las siguientes integrales por partes:

$a)\ \int \ln x \ \ dx =$

$b)\ \int x.sen\,x \ dx =$

$c)\ \int \frac{x}{5}.\ln x \ dx =$

$d)\ \int x^2.\ ln\,x \ dx \ =$

$e)\ \int x^2.\ e^x \ dx \ =$

$f)\ \int x\,.sec^2 x \ \ dx =$

$g)\ \int x^2.\ sen\,x \ dx =$

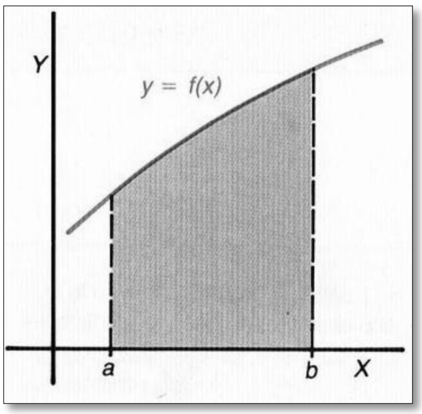
$h)\ \int e^x.\ cos\,x \ dx =$

Cálculo de la Integral Definida – Regla de Barrow

Si f es una función continua en un intervalo $[a; b]$ y F es una primitiva cualquiera de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Cálculo de Áreas

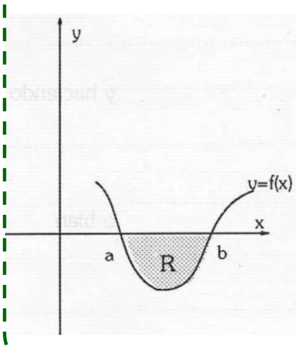


Si f es una **función positiva en** $[a; b]$**,** el área contenida entre el eje "x" y la gráfica de la función f entre los valores $x = a$ y $x = b$ queda calculada con esta regla.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo: calcular el área encerrada por la recta de ecuación $f(x) = 6 - x$ y el eje x en el intervalo $[2; 5]$.

$$A = \int_2^5 (6-x)\,dx = \left(6x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^5 = \left(6.5 - \frac{5^2}{2}\right) - \left(6.2 - \frac{2^2}{2}\right) = 7{,}5$$

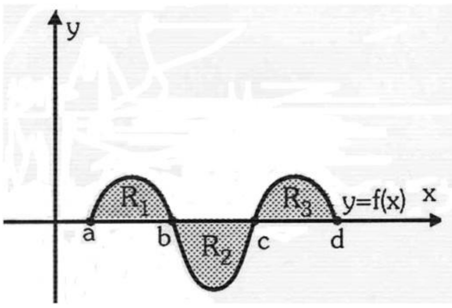


Si f es una **función negativa en** $[a; b]$**,** para calcular el área contenida entre el eje "x" y la gráfica de la función f entre los valores $x = a$ y $x = b$ debemos cambiar el signo a la integral.

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo: calcular el área encerrada por la curva $f(x) = x^2 - 4$ y el eje x en el intervalo $[-2; 2]$.

$$A = -\int_{-2}^2 (x^2 - 4)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = 16$$

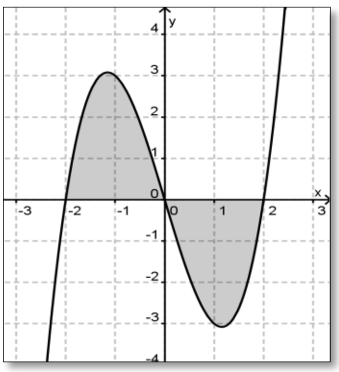


Si f es una **función con partes positivas y negativas**, para calcular el área A de la región sombreada, debemos hallar primero los puntos de intersección de f con el eje x. luego será:

$$A = \acute{A}rea\ R_1 + \acute{A}rea\ R_2 + \acute{A}rea\ R_3$$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$

Ejemplo: calcular el área encerrada por la curva $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje x en el intervalo $[-2; 2]$.



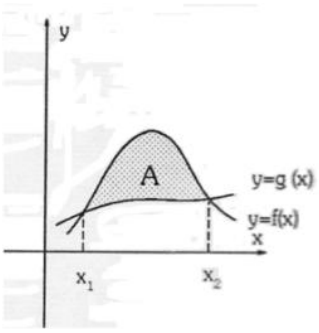
$$A = \acute{A}rea\ R_1 + \acute{A}rea\ R_2$$

$$A = \int_{-2}^2 (x^3 - 4x)\,dx - \int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx$$

$$A = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{0}^{2} =$$

$$A = [0 - (4 - 8)] - [(4 - 8) - 0] = 4 + 4 = 8$$

Si f y g son dos funciones tales que sus gráficas se cortan en los puntos de abscisas x_1 y x_2 y $f(x) \geq g(x)$ en $[x_1; x_2]$ entonces el área A encerrada entre las dos curvas se calcula como el área de la diferencia de las funciones



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

EJERICICIO Nº5: Calcular las siguientes integrales definidas:

$a)\ \int_0^3 -2x^2\, dx =$

$b)\ \int_{-1}^2 (x+1)\, dx =$

$c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\, x \quad dx =$

$d)\ \int_0^1 (x^2 - x)\, dx =$

$e)\ \int_2^5 (3x^2 - 2x + 3)\, dx =$

$f)\ \int_2^6 \sqrt{x-2}\ \ dx =$

EJERICICIO Nº6: Calcular el área limitada por la curva $f(x) = x^2 - 1$ y el eje x, desde $x = 1$ a $x = 3$

EJERICICIO Nº7: Calcular el área limitada entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$

EJERICICIO Nº8: Calcular el área limitada por $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, el eje x, y las rectas $x = 1$ y $x = 3$

EJERICICIO Nº9: Calcular el área limitada entre $f(x) = -x^2 + x$ y $g(x) = -x$

EJERICICIO Nº10: Calcular el área limitada entre $f(x) = x^2 - 5$ y $g(x) = 2x$ +3

EJERICICIO Nº11: Calcular el área limitada entre $f(x) = \frac{x}{3}$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = 4 - x$

EJERICICIO Nº13: Calcular el área limitada entre $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = x$

Tablas y Anexos

Ángulo	sen	cos	tg
0^o	0	1	0
$30^o \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^o \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^o \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90^o \left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	$\nexists$
$120^o \left(\frac{2}{3}\pi\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$135^o \left(\frac{3}{4}\pi\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$150^o \left(\frac{5}{6}\pi\right)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$180^o\,(\pi)$	0	-1	0
$210^o \left(\frac{7}{6}\pi\right)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$225^o \left(\frac{5}{4}\pi\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$240^o \left(\frac{4}{3}\pi\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$270^o \left(\frac{3}{2}\pi\right)$	-1	0	$\nexists$
$300^o \left(\frac{5}{3}\pi\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$315^o \left(\frac{7}{4}\pi\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$330^o \left(\frac{11}{6}\pi\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$360^o\,(2\pi)$	0	1	0

Significado de uno elevado a infinito, 1^∞

Si se pregunta cuánto vale *uno elevado a infinito*, la respuesta suele ser que 1^∞ es una indeterminación, o que no se puede saber con seguridad el valor de 1^∞ , o que 1^∞ puede tener cualquier valor. Sin embargo, la mejor respuesta es que 1^∞ no tiene significado matemático, no designa ningún objeto matemático. Lo mismo que 7/0 o cualquier número dividido por cero, que tampoco designa ningún objeto matemático. O lo mismo que árbol/naranjas (árbol dividido por naranjas), o $cobre^{agua}$ (cobre elevado a agua), que no significan nada aunque se utilicen símbolos que sí tienen significado cuando están combinados con otros símbolos. El signo de división / tiene significado en 4/2, pero no lo tiene, como hemos dicho, en árbol/naranjas. 'Elevado a' tiene significado en 4^2 , pero carece de él en 1^∞ . Tampoco tienen significado matemático expresiones como 0/0, ∞/ ∞ o ∞/ 0 .

Propiedades de Potencias y Raíces

$a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$	*producto de potencias de igual base, se suman los exponentes*
$b^n : b^m = b^{n-m}$	*división de potencias de igual base, se restan los exponentes*
$(c^n)^m = c^{n.m}$	*potencia de otra potencia, se multiplican los exponentes*
$a^0 = 1$	*todo número elevado a la potencia cero da 1*
$b^1 = b$	*todo número elevado a la potencia uno da el mismo numero*
$(a.b)^n = a^n \,.\, b^n$	*la potencia es distributiva respecto del producto*
$(a:b)^n = a^n : b^n$	*la potencia es distributiva respecto a la división*
$(a+b)^n \neq a^n + b^n$	*la potencia **NO** es distributiva en la suma o resta*

Lenguaje Formal	*Ejemplos*
1) Exponentes racionales $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad con\ a > 0, \quad m,n \in \mathbb{N}$	1) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = \sqrt[3]{8^4} = 8^{4/3}$
2) Distributiva en multiplicación y división $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \quad con\ a,b > 0 \quad n \in \mathbb{N}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	2) $\sqrt{4.5} = \sqrt{4}.\sqrt{5}$ $\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{2}$
3) Raíz de raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$	3) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
4) Simplificación de radicales • *Si n es par* $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ • *Si n es impar* $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	4) *Si n es par* $\sqrt[6]{2^6} = \lvert 2 \rvert = 2$ $\sqrt[6]{(-2)^6} = \lvert 2 \rvert = 2$ *Si n es impar* $\sqrt[3]{5^3} = 5$ $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
5) Radicales equivalentes: Una raíz enésima positiva no varía si se multiplican o dividen por un mismo número el índice y el exponente del radicando. $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n.m]{a^{r.m}} \quad con\ \ m,r > 0$ $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n:m]{a^{r:m}} \quad con\ \ m,r > 0,\ \ m\ \ es\ divisor\ de\ n\ y\ r$	5) $\sqrt[5]{3^2.a^3} = \sqrt[5.2]{(3^2)^2.(a^3)^2} = \sqrt[10]{3^4.a^6}$ $\sqrt[9]{5^3.a^6} = \sqrt[9:3]{5^{3:3}.a^{6:3}} = \sqrt[3]{5.a^2}$

Ecuaciones y Funciones Cuadráticas

Tipo	Expresión	Lenguaje Simbólico	Ejemplo
Incompletas	$f(x) = ax^2 + c$	$ax^2 + c = 0$ $\lvert x\rvert = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \quad y \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$	$f(x) = x^2 - 4$ $x^2 - 4 = 0$ $\lvert x\rvert = \sqrt{4}$ $x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = -2$ **Dos raíces reales opuestas**
	$f(x) = ax^2 + bx$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = ax + b = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	$f(x) = 3x^2 + 6x$ $3x^2 + 6x = 0$ $x.(3x + 6) = 0$ $x_1 = 0 \quad y \quad 3x + 6 = 0$ $x_2 = -\frac{6}{3}$ $x_2 = -2$ ***Dos raíces reales distintas, de las cuales una siempre es cero.***
Completa	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c = 0$ ***<u>Fórmula Resolvente</u>*** $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ $-2x^2 + 5x - 2 = 0$ $a = -2 \quad b = 5 \quad c = -2$ $x_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.(-2).(-2)}}{2.(-2)}$ $x_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-4}$ $x_{1;2} = \frac{-5 \pm 3}{-4}$ $x_1 = \frac{-5 + 3}{-4} \quad y \quad x_2 = \frac{-5 - 3}{-4}$ $x_1 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{-8}{-4} = 2$ ***Dos raíces reales distintas***

FORMA	EXPRESIÓN	PARÁMETROS
Polinómica	$f(x) = ax^2 + bx + c$	a, b, c
Canónica	$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$	a, x_v, y_v
Factorizada	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	a, x_1, x_2

$$x_v = \frac{-b}{2.a}$$

$$y_v = f(x_v)$$

$$b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 2\ raices\ reales$$
$$b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 1\ raiz\ real$$
$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow No\ tiene\ raices\ reales$$